ÜBER

doppelinvolutorische Systeme im Raume

INAUGURAL-DISSERTATION

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG

zur

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

vorgelegt von

ANDREAS PAMPUCH

aus Schalkowitz i. Schl.

STRASSBURG

Buchdruckerei von E. Bauer, Langstrasse, Nr. 101.

1886.

Herrn Professor Dr. SCHRÖTER

in BRESLAU

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

EINLEITUNG.

Entsprechen sich bei zwei kollinearen, einander durchdringenden Räumen R und S die Punktepaare $\begin{matrix}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots \\ \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots\end{matrix}$, so sollen die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots$. Gruppenpunkte heissen. Besteht bei zwei Räumen dieser Art wenigstens eine Punktgruppe genau aus 4 Punkten, und keine aus mehr als 4 Punkten, so soll von diesen Räumen gesagt werden, dass sie ein doppelinvolutorisches System im Raume bilden. Eine genau aus 4 Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ bestehende Gruppe heisse ein Punktquadrupel. Die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ und ebenso $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$ will ich Gegenpunkte und die Geraden $|\mathfrak{p}\ \mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\ \mathfrak{s}|$ Gegengerade dieses Quadrupels nennen. Analoge Bezeichnungen mögen bei Linien und Ebenen gelten. Vorausschicken will ich nun noch ohne Beweis einige, zum Teil schon bekannte, leicht herleitbare Sätze.

1. Hilfssatz: „Besteht bei zwei auf einander liegenden projektivischen Punktreihen eine Gruppe aus 4 Punkten, so besteht jede Gruppe aus 4 Punkten[1]). Die beiden Punktreihen bilden also eine Doppelinvolution. Dabei sind die Punkte einer jeden reellen Gruppe 4 harmonische Punkte, die niemals zusammenfallen. Reelle Doppelpunkte kommen also hier nicht vor. Die Gegenpunkte sämtlicher Quadrupel bilden eine elliptische Punktinvolution. Soll die Projektivität eine reelle sein, so giebt es nur diese Art von Doppelinvolutionen auf einer reellen Geraden".

2. Hilfssatz: „Besteht bei zwei aufeinander liegenden projektivischen Punktfeldern eine Gruppe aus 4 nicht auf einer Geraden liegenden Punkten, so besteht im allgemeinen jede Gruppe aus 4 nicht auf einer Geraden liegenden Punkten[2]). Eine Ausnahme davon machen nur diejenigen Gruppen, die ent-

---

[1]) H. Reim, *Inauguraldiss.*, Breslau 1879.

[2]) Schröter, *Theorie der Oberfl.* 2. Ordn. p. 411.

weder mit dem einzigen reellen Doppelpunkte der beiden Felder zusammenfallen, oder auf der einzigen reellen Doppelgeraden derselben liegen. Durch den reellen Doppelpunkt gehen die Gegengeradenpaare sämtlicher Punktquadrupel und bilden eine elliptische Strahleninvolution, während die Gegenpunkte sämtlicher Linienquadrupel eine auf der reellen Doppelgeraden befindliche Punktinvolution erzeugen, die zu der ersteren perspektivisch liegt. Die zwei Punktfelder bilden also ein doppelinvolutorisches System in der Ebene. In der Ebene giebt es nur diese einzige Art reeller doppelinvolutorischer Systeme".

3. Hilfssatz: „Durch jedes Punktquadrupel eines doppelinvolutorischen Systems in der Ebene gehen 2 und nur 2 reelle sich selbst entsprechende Kegelschnitte. Der eine von ihnen zerfällt in ein Geradenpaar, während der andere niemals zerfällt. Sämtliche Kegelschnitte der zweiten Art bilden ein Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte. Jedes Punktquadrupel eines solchen Kegelschnittes besteht aus 4 harmonischen Punkten desselben. Die Geradenpaare, in welche die Kegelschnitte der ersten Art zerfallen, bilden eine elliptische Strahleninvolution".

A. Konstruktion doppelinvolutorischer Systeme im Raume.

I. Das geschart doppelinvolutorische System.

Es seien a, b, c, d vier harmonische Erzeugende der einen, und g, g', g'' drei beliebige Erzeugende der anderen Schar eines Hyperboloides H(²). Die Schnittpunkte der vier ersteren Geraden mit den drei letzteren seien bezüglich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$. Dann ist bekanntlich das Doppelverhältnis $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{d}') = (\mathfrak{a}''\,\mathfrak{b}''\,\mathfrak{c}''\,\mathfrak{d}'') = -1$. Werden nun $\frac{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{b}''}{\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}''}$ als Paare entsprechender Punkte zweier kollinearen Räume $\frac{R}{S}$ festgesetzt, so ist dadurch offenbar die kollineare Beziehung zwischen diesen Räumen eindeutig bestimmt.

Behauptet wird, dass die kollineare Beziehung zwischen R und S eine derartige ist, dass jede reelle Punktgruppe derselben aus genau vier auf einer Geraden liegenden harmonischen Punkten besteht.

Beweis. Der geraden d von R entspringt in S die Gerade a, weil d durch den Punkt $\mathfrak{b}''$ geht und die beiden leicht als Doppelgeraden erkenntlichen Linien g und g' schneidet, während a durch $\mathfrak{a}''$ geht und dieselben Geraden g und g' schneidet. Es sind also $\frac{\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}'}{\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}'}$ Paare entsprechender Punkte in $\frac{R}{S}$. Auf der Doppelgeraden g sind demnach $\frac{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{b}}{\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{a}}$ Paare entsprechender Punkte von $\frac{R}{S}$ und folglich auch, da $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) = -1$, das Paar $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$. Es sind also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die sämtlichen Punkte einer Gruppe auf der Doppelgeraden g. Mithin ist diese Träger einer Doppelinvolution (1. Hilfssatz). Aus demselben Grunde ist g' Träger einer Doppelinvolution mit dem Punktquadrupel $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$. Die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind mithin sämtliche Geraden einer Liniengruppe, bilden also ein „Linienquadrupel“. Die Gerade g'' endlich ist auch eine Doppelgerade, weil sie einerseits durch $\mathfrak{b}''$ geht und die Geraden a und b schneidet und andererseits durch $\mathfrak{a}''$ geht und die Geraden b und c schneidet. Die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ sind also sämtliche Punkte einer Gruppe auf g''. Mithin befindet sich auch auf dieser Doppelgeraden eine Doppelinvolution.

Alle Erzeugenden von $H^{(2)}$, die derselben Schar, wie die Geraden g, g', g'' angehören, sind Doppelgerade der beiden Räume mit Punkt-Doppelinvolutionen. Denn jeder Erzeugenden x dieser Schar, die also das Linienquadrupel a, b, c, d schneidet, entspricht, wenn sie als eine Gerade von R angesehen wird, in S eine Gerade y, die gleichfalls dieses Linienquadrupel schneidet, also eine Erzeugende derselben Schar von $H^{(2)}$. Durchläuft nun x die ganze Regelschar auf $H^{(2)}$, so durchläuft demnach y dieselbe Regelschar. Diese beiden Regelscharen sind offenbar unter sich projektivisch. Sie sind aber ausserdem noch mit einander identisch, weil hier drei Doppelgerade vorhanden sind, nämlich g, g', g''. Dass ferner jede unter allen diesen Doppelgeraden Träger einer Doppelinvolution ist, folgt daraus, dass jede von dem Linienquadrupel a, b, c, d offenbar in einem Punktquadrupel geschnitten wird. Auf keiner dieser Doppelgeraden existiert also ein reeller Doppelpunkt (1. Hilfssatz). Mithin befindet sich auf dem offenbar sich selbst entsprechenden Hyperboloide $H^{(2)}$ überhaupt kein reeller Doppelpunkt von R und S.

Nachzuweisen bleibt daher nur noch, dass auch Gruppenpunkte, die nicht auf $H^{(2)}$ gelegen sind, aus vier auf einer Geraden liegenden harmonischen Punkten bestehen.

Es sei nun $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, t... eine Gruppe der letzteren Art, p diejenige Gerade, die durch $\mathfrak{p}$ geht und die Doppelgeraden g' und g'' schneidet, und es seien $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ die Schnittpunkte von p mit g' und g''. Diese Geraden g' und g'' sind, wie schon gezeigt wurde, Träger von Doppelinvolutionen. Zu $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ mögen nun auf den letzteren als fernere Quadrupelpunkte die Punkte $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{s}''$ gehören. Die Geraden $p = |\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}''\,|$, $q = |\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''\,|$, $r = |\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}''\,|$, $s = |\,\mathfrak{s}'\,\mathfrak{s}''\,|$ bilden also ein Linienquadrupel. Mithin liegen die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, t... der Reihe nach auf diesen Geraden. Nimmt man statt g', g'' das Geradenpaar g''', g und verfährt in derselben Weise, so zeigt sich ebenso, dass die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, t... auf einem zweiten Linienquadrupel p', q', r', s' der Reihe nach liegen. Daraus folgt, dass ihre Anzahl höchstens vier sein kann, dass also $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{p}$ ist. Diese Anzahl darf aber auch nicht kleiner als vier sein. Denn die obigen Punktquadrupel $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{s}''$ sind je vier von einander verschiedene harmonische Punkte (1. Hilfssatz). Mithin sind p, q, r, s vier harmonische Erzeugende eines Hyperboloides und schneiden sich daher niemals. Es dürfen also auch von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, welche der Reihe nach auf diesen Geraden liegen, keine zwei zusammen fallen, sondern sie müssen sämtlich von einander verschieden sein. Reelle Doppelpunkte sind also bei R und S überhaupt nicht vorhanden.

Diese Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ liegen endlich auch auf einer Geraden. Wäre dies

nämlich nicht der Fall, wären also die Geraden $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ von einander verschieden, so dürften sich die letzteren nicht schneiden, weil sonst ihr Schnittpunkt ein reeller Doppelpunkt von R und S sein müsste. Durch diese zwei Geraden und irgend eine sie nicht schneidende Doppelgerade von H $(^2)$, etwa durch g, wäre alsdann ein eigentliches Hyperboloid H_1 $(^2)$ eindeutig bestimmt. Dieses Hyperboloid H_1 $(^2)$ entspräche sich in R und S augenscheinlich selbst. Der gesamten Regelschar von H_1 $(^2)$, der g angehörte, als Gebilde von R aufgefasst, müsste dieselbe Regelschar in S entsprechen. Wir hätten also zwei auf einander liegende projektivische Regelscharen mit einer reellen Doppelgeraden g und zwei sich wechselseitig entsprechenden Erzeugenden $|\mathfrak{p}\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\mathfrak{s}|$. Mithin müssten diese Regelscharen eine hyperbolische Involution bilden. Eine beliebige Erzeugende der anderen Schar von H_1 $(^2)$ schnitte H $(^2)$ in einem Punkte der Doppelgeraden g; sie schnitte mithin dasselbe noch in einem ferneren reellen Punkte. Das zu diesem Punkte gehörige Punktquadrupel würde offenbar auf beiden sich selbst entsprechenden Hyperboloiden H $(^2)$ und H_1 $(^2)$ liegen. Als H $(^2)$ angehörig bestünde dieses Quadrupel aus vier harmonischen Punkten, welche auf einer Geraden lägen, etwa auf g'. Diese Doppelgerade hätte also mit H_1 $(^2)$ vier von einander verschiedene Punkte gemein und gehörte mithin auch diesem Hyperboloide als Erzeugende an. Sie müsste daher, da sie ausserdem nur derselben Schar von H_1 $(^2)$ angehören könnte wie g, die zweite Doppelgerade jener hyperbolischen Involution auf H_1 $(^2)$ sein. Von den vier hyperboloidisch gelegenen Geraden g, g', $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$, $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ wäre also das erstere Paar g, g' von dem letzteren $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$, $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ harmonisch getrennt. Da ausserdem von den zwei Graden $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ keine das ursprüngliche Hyperboloid H $(^2)$ in reellen Punkten schneiden dürfte, weil die etwaigen reellen Schnittpunkte nur aus je zwei Punkten bestehende Gruppen ergeben würden, so müsste eine von ihnen ganz innerhalb und die andere ganz ausserhalb des Hyperboloides liegen. Es müsste mithin die Verbindungsgerade zweier beliebigen Punkte von $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ das Hyperboloid H $(^2)$ stets in zwei rellen Punkten schneiden. Dies wäre also auch bei der Geraden $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}|$ der Fall. Wären nun diese Schnittpunkte von $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}|$ mit H $(^2)$ $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ und die durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ gehenden Erzeugenden von H $(^2)$, die gleichzeitig Doppelgeraden von R und S wären, x und y, so müssten die zu $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ gehörenden Punktquadrupel $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ und $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_4$ auf diesen Doppelgeraden x und y liegen und je vier harmonische von einander verschiedene Punkte bilden. Zu der Geraden $|\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1|$ würde demnach das aus den vier hyperboloidisch gelegenen und daher sich nicht schneidenden Geraden $|\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1|$, $|\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_2|$, $|\mathfrak{x}_3\,\mathfrak{y}_3|$, $|\mathfrak{x}_4\,\mathfrak{y}_4|$ bestehende Linienquadrupel

gehören. Zu der Geraden $|\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1|$ gehört aber, da sie mit $|\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}|$ identisch ist, das Linienquadrupel $|\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}|$, $|\mathfrak{q}\ \mathfrak{r}|$, $|\mathfrak{r}\ \mathfrak{s}|$, $|\mathfrak{s}\ \mathfrak{p}|$. Es müssten mithin diese beiden Linienquadrupel identisch sein. Dies ist aber unmöglich, da vier sich nicht schneidende Gerade nicht mit vier anderen identisch sein können, die ein windschiefes Vierseit bilden. Die Annahme also, $|\mathfrak{p}\ \mathfrak{r}|$ sei von $|\mathfrak{q}\ \mathfrak{s}|$ verschieden, ist falsch. Folglich müssen beide Geraden in eine zusammen fallen, wie behauptet wurde.

Dass die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ vier harmonische Punkte sind, folgt jetzt unmittelbar daraus, dass sie ausserdem noch auf vier harmonischen Geraden liegen, nämlich bezüglich auf p, q, r, s.

Damit ist der Existenzbeweis eines doppelinvolutorischen Systems, welches das geschart doppelinvolutorische heissen möge, durch direkte Konstruktion desselben geführt. Nebenbei ergeben sich aus der angestellten Betrachtung folgende Sätze und Folgerungen:

„Beim geschart doppelinvolutorischen Systeme besteht jede reelle Punktgruppe genau aus vier Punkten und jede reelle Ebenengruppe genau aus vier Ebenen. Reelle Doppelpunkte oder reelle Doppelebenen existieren hier nicht. Jedes Punktquadrupel liegt auf einer Geraden und wird von vier harmonischen Punkten gebildet, und jedes Ebenenquadrupel geht durch eine Gerade und besteht aus vier harmonischen Ebenen. Jede Liniengruppe wird entweder von vier harmonischen Erzeugenden eines Hyperboloides, oder von einer Doppelgeraden gebildet. Es giebt hierselbst unendlich viele reelle Doppelgerade, und zwar geht durch jeden reellen Punkt im Raume eine und nur eine von ihnen, wie auch in jeder reellen Ebene eine und nur eine sich vorfindet. Die Gegenpunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$ eines jeden Quadrupels $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ sind einander zugeordnete Punkte eines geschart involutorischen Systems mit imaginären Involutionsachsen.“

Anmerkung. Man kann aus dem geschart involutorischen System, das keine reelle Involutionsachsen hat, das vorliegende dadurch erhalten, dass man zu einem jeden Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ des ersten Systems dasjenige Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}$ bestimmt, das mit dem vorigen auf derselben Geraden liegt und dasselbe harmonisch trennt, und die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ als Punktquadrupel des gesuchten Systems betrachtet.

2. Das planar doppelinvolutorische System.

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vier beliebige in einer Ebene ε, nicht aber auf einer Geraden liegende Punkte. Die Durchschnittspunkte der Geradenpaare $|\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\ \mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{c}\ \mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{a}\ \mathfrak{d}|$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$ mögen bezüglich mit g, 2, 4 bezeichnet werden und die der Geraden $g = |24|$ mit den Geraden $|\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\ \mathfrak{d}|$ mit 1 und 3. Durch die Gerade g sei eine zweite beliebige Ebene ε' gelegt und $\mathfrak{o}$ sei ein beliebiger, weder in ε noch in ε' gelegener Punkt. Von diesem Punkte $\mathfrak{o}$ aus projiziere ich die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, g auf die Ebene ε' und bezeichne die Projektionen der Reihe nach mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, g'. Von den fünf Punkten 2, 4, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{o}$ liegen keine vier in einer Ebene. Dasselbe gilt von den Punkten 4, 2, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{o}$. Werden daher bei zwei Räumen $\frac{R}{S}$ die Punktepaare $\frac{2,\ 4,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{o}}{4,\ 2,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{o}}$ als Paare entsprechender Punkte angesehen, so sind dadurch die Räume R und S auf eindeutige Weise in kollineare Beziehung zu einander gebracht.

Diese Beziehung ist eine derartige, dass jede Gruppe aus höchstens vier in einer Ebene liegenden Punkten besteht.

Beweis. Der Ebene $\varepsilon = [24\ \mathfrak{a}]$ von R entspricht in S, die Ebene $[42\ \mathfrak{b}]$ d. i. wieder ε. Mithin ist ε eine Doppelebene. Ähnlich zeigt man, dass auch ε' eine Doppelebene ist. Der Geraden $|\mathfrak{c}'\ \mathfrak{o}|$ von R ist die Gerade $|\mathfrak{d}'\ \mathfrak{o}|$ in S zugeordnet, dem Schnittpunkte $\mathfrak{c}$ also von $|\mathfrak{c}'\ \mathfrak{o}|$ mit der Doppelebene ε der Schnittpunkt $\mathfrak{d}$ von $|\mathfrak{d}'\ \mathfrak{o}|$ mit ε. Dem Punkte $\mathfrak{b}$ von R, d. i. dem Schnittpunkte der Geraden $|2\ \mathfrak{a}|$ und $|4\ \mathfrak{c}|$, entspricht in S der Schnittpunkt der Geraden $|4\ \mathfrak{b}|$ und $|2\ \mathfrak{b}|$, also der Punkt $\mathfrak{c}$. Dem Punkte $\mathfrak{d}$ von R, d. h. dem Schnittpunkte der Geraden $|2\ \mathfrak{c}|$ und $|4\ \mathfrak{a}|$, ist in S der Punkt $\mathfrak{a}$ zugeordnet als Schnittpunkt der Geraden $|4\ \mathfrak{d}|$ und $|2\ \mathfrak{b}|$. Es sind also $\frac{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}}{\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{a}}$ entsprechende Punktepaare von $\frac{R}{S}$ Daraus folgt, da ausserdem diese vier Punkte in einer Ebene liegen, dass diese Ebene ε ein doppelinvolutorisches System enthält (2. Hilfssatz). Dieses System in ε hat also g zum reellen Doppelpunkte und g zur reellen Doppelgeraden. Die Ebene $[g, \mathfrak{o}]$ ist mithin eine Doppelebene. Es gehen also durch die Gerade g drei Doppelebenen, nämlich ε, ε', $[g, \mathfrak{o}]$. Folglich ist jede Ebene des Büschels mit der Achse g eine Doppelebene. Die Verbindungslinie h der Doppelpunkte $\mathfrak{o}$ und g ist offenbar eine Doppelgerade und zwar eine derartige, die lauter Doppelpunkte enthält. Denn jeder Punkt auf h kann als Schnittpunkt dieser Doppelgeraden mit einer durch g gehenden Doppelebene angesehen werden. Die Doppelgerade g hat als reelle Doppelgerade eines doppelinvolutorischen Systems in der Ebene keine

reellen Doppelpunkte (2. Hilfssatz). Projiziere ich daher von einem beliebigen Punkte der Doppelgeraden h, also von einem Doppelpunkte aus, ein beliebiges in ε gelegenes Punktquadrupel auf eine beliebige durch g gehende Ebene, mithin aus eine Doppelebene, so erhalte ich wiederum ein Punktquadrupel. Mithin ist diese Ebene, d. h. jede durch g gelegte Ebene Träger eines „doppelinvolutorischen Systems in der Ebene.“ Damit ist Alles bewiesen, und wir können, wenn wir dieses von R und S gebildete System als das planar doppelinvolutorische bezeichnen, folgende Sätze aussprechen:

„Beim planar doppelinvolutorischen Systeme kommen nur zwei reelle Doppelgerade g und h vor. Von diesen enthält die eine g keine reellen Doppelpunkte, die andere dagegen, also h, unendlich viele, indem jeder Punkt derselben ein Doppelpunkt ist. Jede durch g gehende Ebene ist eine Doppelebene. Andere reelle Doppelebenen existieren nicht. Jede Gruppe auf g besteht aus zwei Punkten, die konjugierte Punktepaare einer elliptischen Involution sind. Jede andere Punktgruppe dagegen, die also weder auf g noch auf h liegt, besteht genau aus 4 Punkten, die nicht auf einer Geraden, aber stets in einer Ebene und zwar in einer Doppelebene liegen. Sämtliche Punktgruppen einer beliebigen Doppelebene sind Punktquadrupel eines doppelinvolutorischen Systems in der Ebene. Die Gegenpunkte eines jeden Punktquadrupels dieses Systemes sind einander zugeordnete Punkte eines geschart-involutorischen Systems, das g und h zu Involutionsachsen hat.“

Die diesen Sätzen dual gegenüberstehenden sind leicht zu bilden und sollen, wie von nun ab alle Sätze dieser Art, übergangen werden.

---

3. Das hyperbolisch doppelinvolutorische System.

Zunächst möge hier ein Satz, der sowohl bei diesem Systeme als auch bei dem folgenden gültig ist, eine Stelle finden.

„Besteht bei zwei kollinearen Räumen R und S eine einzige Punktgruppe genau aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, so besteht eine jede Punktgruppe $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$.... bei diesen Räumen aus höchstens vier Punkten, so dass $\mathfrak{t}$ stets mit $\mathfrak{p}$ identisch ist[1])“.

---

[1]) Schröter, *Ueber cyklisch projektive Punktquadrupel in zwei kollinearen Räumen.* (Math. Annalen, Bd. XX.)

Beweis. Vorausgesetzt wird also hier, dass bei zwei kollinearen Räumen $\begin{smallmatrix}R\\S\end{smallmatrix}$ die Punktepaare $\begin{smallmatrix}a,&b,&c,&d,&p,&q,&r,&s\\b,&c,&d,&a,&q,&r,&s,&t\end{smallmatrix}$ Paare entsprechender Punkte sind; zu zeigen ist, dass t identisch mit p ist.

Es gelten bei Doppelverhältnissen bekanntlich die Identitäten:

1) $|\,a\,b\,|\ (c\,d\,p\,q).\ |\,a\,b\,|\ (c\,d\,q\,r).\ |\,a\,b\,|\ (c\,d\,r\,p) = 1,$

2) $|\,c\,d\,|\ (a\,b\,p\,q).\ |\,c\,d\,|\ (a\,b\,q\,r).\ |\,c\,d\,|\ (a\,b\,r\,p) = 1.$

Ferner hat man wegen der Kollinearität von R und S die Gleichungen:

3) $|\,a\,b\,|\ (c\,d\,p\,q) = |\,b\,c\,|\ (d\,a\,q\,r),$

4) $|\,c\,d\,|\ (a\,b\,p\,q) = |\,d\,a\,|\ (b\,c\,q\,r).$

Endlich gilt hier noch, wie überhaupt bei sechs beliebigen Punkten im Raume, die Identität:

5) $|\,a\,b\,|\ (c\,d\,q\,r).\ |\,b\,c\,|\ (d\,a\,q\,r).\ |\,c\,d\,|\ (a\,b\,q\,r).\ |\,d\,a\,|\ (b\,c\,q\,r) = 1.$

Wird 3) in 1), ferner 4) in 2) eingesetzt, und werden alsdann 1) und 2) mit einander multipliziert, so erhält man unter Berücksichtigung von 5) die Gleichung:

$$|\,a\,b\,|\ (c\,d\,r\,p).\ |\,c\,d\,|\ (a\,b\,r\,p) = 1 \text{ oder}$$

6) $|\,a\,b\,|\ (c\,d\,r\,q) = |\,c\,d\,|\ (a\,b\,p\,r)$

Nun ist wegen der Kollinearität von R und S:

$$|\,a\,b\,|\ (c\,d\,r\,p) = |\,b\,c\,|\ (d\,a\,s\,q) = |\,c\,d\,|\ (a\,e\,t\,r)$$

Mithin ist:

$$|\,c\,d\,|\ (a\,b\,p\,r) = |\,c\,d\,|\ (a\,b\,t\,r)$$

d. h. der Punkt t liegt in der Ebene [c d p]. In derselben Weise zeigt man, indem man die Punkte a, b, c, d cyklisch mit einander vertauscht, dass dieser Punkt t auch in jeder der Ebenen [d a p], [a b p], [b c p] liegen muss. Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Identität von t und p.

Damit ist der obige Satz nur im allgemeinen bewiesen. Illusorisch wird nämlich dieser Beweis für den Fall und nur für diesen, wenn eines der Doppelverhältnisse in den Gleichungen 1) und 2) gleich Null oder unendlich gross wird, d. h. wenn p in einer der Ebenen des Tetraeders mit den Eckpunkten a, b, c, d liegt. Der Satz bleibt aber auch in diesem Falle bestehen, wie sofort einleuchtet, wenn a, b, c, d durch das Tetraeder p, q, r, s einer beliebigen anderen Punktgruppe ersetzt wird, die mit der ersteren die Gegengeraden nicht gemein hat.

Es seien a, b, c, d, g fünf beliebige Punkte im Raume, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Werden die Punktepaare $\begin{smallmatrix}a,&b,&c,&d,&g\\b,&c,&d,&a,&g\end{smallmatrix}$ als Paare entsprechender Punkte zweier Räume $\begin{smallmatrix}R\\S\end{smallmatrix}$ angesehen, so ist damit die Kollinearität der letzeren vollständig bestimmt. Jede Gruppe besteht hier nach dem obigen Satze höchstens

aus 4 Punkten. Das vorliegende System ist also ein doppelinvolutorisches; es heisse das hyperbolisch doppelinvolutorische. Um die characteristischen Unterschiede dieses Systems von dem folgenden ersichtlich zu machen, will ich hier noch einige Eigenschaften desselben ableiten.

Sei g diejenige Gerade, die durch den Doppelpunkt $\mathfrak{g}$ des vorliegenden Systems geht und die Geraden $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ schneidet. Die dadurch sich ergebenden Schnittpunkte seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$. Der Geraden g von R, die auch als Schnittlinie der Ebenen $[\mathfrak{g}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]$ und $[\mathfrak{g}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}]$ angesehen werden kann, entspricht in S die Schnittlinie der Ebenen $[\mathfrak{g}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}]$ und $[\mathfrak{g}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]$, also wieder g. Mithin ist g eine Doppelgerade. Da der Punkt $\mathfrak{g}$ ein reeller Doppelpunkt auf g ist, und die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ sich wechselseitig entsprechen, so ist g Träger einer hyperbolischen Punktinvolution. Der andere reelle Doppelpunkt dieser Involution, der als vierter harmonischer Punkt zu $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}$ leicht zu konstruieren ist, sei $\mathfrak{h}$. Die Geraden $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ entsprechen sich wechselseitig in unseren Räumen. Durchläuft nun der Punkt $\mathfrak{x}$ einer veränderlichen Punktgruppe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ die Gerade $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$, so durchläuft deshalb der Gegenpunkt $\mathfrak{z}$ desselben gleichfalls diese Gerade. Die auf diese Weise von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ erzeugten Punktreihen sind offenbar projektivisch und bilden ausserdem eine hyperbolische Involution, weil der Punkt $\mathfrak{m}$ ein reeller Doppelpunkt beider ist und die Gegenpunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ sich wechselseitig entsprechen. Der zweite (reelle) Doppelpunkt dieser Involution, der wiederum als vierter harmonischer Punkt leicht zu konstruieren ist, sei $\mathfrak{m}'$. Auf der Geraden $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ erhalten wir in derselben Weise eine zweite hyperbolische Involution, die von den veränderlichen Gegenpunkten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}$ gebildet wird und den Punkt $\mathfrak{n}$ zum Doppelpunkte hat. Der zweite (reelle) Doppelpunkt hierbei möge $\mathfrak{n}'$ heissen. Hieraus folgt, dass jede Gruppe, deren Punkte auf den Geraden $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$ und $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ liegen, genau aus vier Punkten besteht mit Ausnahme der beiden Gruppen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$, die nur aus je zwei Punkten zusammengesetzt sind. Die Gerade $h = [\mathfrak{m}'\,\mathfrak{n}']$, die, wie so eben gezeigt wurde, linear konstruiert werden kann, ist also eine Doppelgerade der Räume R und S und Träger einer Punktinvolution. Mithin sind die Ebenen $\gamma = [h, \mathfrak{g}]$ und $\chi = [h, \mathfrak{h}]$ reelle Doppelebenen. Die Schnittpunkte der Liniengruppe $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}|$ mit der Doppelebene γ sind sämtliche Punkte einer Gruppe. Sie sind ferner vier von einander verschiedene Punkte, weil sonst die Doppelebene γ durch einen der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und mithin durch alle gehen müsste, was wider die Voraussetzung wäre, nach der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ nicht in einer Ebene liegen. Endlich liegen jene Schnittpunkte auch nicht auf einer Geraden, weil man bei einem räumlichen Vierseit keine Gerade ziehen kann, die dessen vier Seiten in vier verschiedenen Punkten schnitte. Wir

haben also in der Ebene γ eine Gruppe, die genau aus vier nicht auf einer Geraden liegenden Punkten besteht. Mithin befindet sich in γ ein ebenes doppelinvolutorisches System (2. Hilfssatz). Infolgedessen gibt es in γ nur einen einzigen reellen Doppelpunkt, der also der Punkt $\mathfrak{g}$ sein muss, und nur eine einzige reelle Doppelgerade, die nur die Gerade $\mathfrak{h}$ sein kann. Ferner ist diese Linie $\mathfrak{h}$ Träger einer elliptischen Punktinvolution.

Das Analoge gilt auch von der Doppelebene χ.

Ausser g, h, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, γ, χ giebt es in diesem Systeme keine ferneren reellen Doppelelemente.

Gäbe es z. B. noch einen dritten reellen Doppelpunkt $\mathfrak{k}$, so dürfte er weder in den Doppelebenen γ, χ liegen, weil diese Ebenen nur je einen reellen Doppelpunkt, der $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{h}$ ist, enthalten, noch auch auf der Doppelgeraden g, weil diese nur die Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ besitzt. Mithin müsste die Doppelgerade $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{k}\,|$ die Doppelebene χ in einem von $\mathfrak{h}$ verschiedenen reellen Doppelpunkte schneiden, was unmöglich ist. Folglich ist auch $\mathfrak{k}$ als dritter reeller Doppelpunkt unmöglich. In ähnlicher Weise zeigt man, dass auch keine fernere reelle Doppelebene oder Doppelgerade hier existieren kann.

Nun ist es auch leicht einzusehen, dass jede Gruppe, deren Punkte weder in einer der Doppelebenen γ und χ noch auf der Doppelgeraden g liegen, genau aus vier weder auf einer Geraden noch in einer Ebene befindlichen Punkten besteht. Denn es müsste sonst, wenn also eine dieser Gruppen entweder weniger als vier Punkte enthielte, oder zwar vier, die aber auf einer Geraden oder in einer Ebene lägen, diese Gruppe entweder auf einer reellen Doppelgeraden oder in einer reellen Doppelebene liegen, was schon als unmöglich nachgewiesen wurde.

Alles von der Gruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ rücksichtlich der Doppelelemente Gesagte gilt auch von einer jeden Gruppe $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, deren Punkte keine besondere Lage im Raume haben, die also die Ecken eines eigentlichen Tetraeders bilden. Denn in derselben Weise, wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{g}$ können auch die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{g}$ der ganzen Betrachtung zu Grunde gelegt werden, ohne dass dadurch an der Kollinearität von R und S etwas geändert würde. Die Gegengeraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ schneiden also die Doppelgeraden g und h in Paaren konjugierter Punkte und zwar in Paaren konjugierter Punkte bestimmter Involutionen u. s. w.

Damit haben wir folgende Sätze gewonnen:

„Das hyperbolisch doppelinvolutorische System enthält nur je zwei reelle Doppelpunkte, Doppelgeraden und Doppelebenen. Jede auf einer der Doppelgeraden gelegene Gruppe besteht aus einem Paare konjugierter Punkte einer

bestimmten Involution. Von diesen beiden Punktinvolutionen ist die eine hyperbolisch, die andere elliptisch. Jede andere auf keiner der reellen Doppelgeraden, wohl aber in einer der reellen Doppelebenen gelegenen Gruppe besteht aus genau vier nicht auf einer Geraden befindlichen Punkten, die ein Punktquadrupel eines bestimmten ebenen doppelinvolutorischen Systems bilden. Jede Punktgruppe endlich, deren Punkte weder auf einer reellen Doppelgeraden noch in einer reellen Doppelebene liegen, besteht genau aus vier Punkten, welche die Ecken eines Tetraeders bilden. Die Gegengeraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ eines jeden Punktquadrupels $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ schneiden die beiden reellen Doppelgeraden und zwar in Paaren konjugierter Punkte jener schon erwähnten Involutionen. Ist ein reeller Doppelpunkt und ein Punktquadrupel $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ des Systems gegeben, so lassen sich die übrigen fünf reellen Doppelelemente linear konstruieren. Die Gegenpunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$ einer jeden Gruppe sind entsprechende Punkte eines geschart-involutorischen Systems, das die reellen Doppelgeraden des vorliegenden Systems zu Involutionsachsen hat [1])".

---

4. Das elliptisch doppelinvolutorische System.

Es seien g, m, n drei beliebige sich nicht schneidende Geraden im Raume und a b, c, d vier harmonische Erzeugende der anderen Schar des durch g, m, n bestimmten Hyperboloides H ([2]). Die Geraden g, n, m mögen der Reihe nach von den Geraden a, b, c, d in den Punkten 1, 2, 3, 4, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}'$ geschnitten werden.

Durch die Punktepaare $\begin{smallmatrix}1, & 2, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}', & \mathfrak{d}'\\ 2, & 3, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{a}'\end{smallmatrix}$ als Paare entsprechender Punkte zweier Räume $\begin{smallmatrix}R\\S\end{smallmatrix}$ ist die Kollinearität der letzteren offenbar eindeutig bestimmt. R und S bilden ein doppelinvolutorisches von den drei schon aufgestellten verschiedenes System, welches das elliptische genannt werden soll.

Aus unserer Festsetzung folgt unmittelbar, dass g eine Doppelgerade beider Räume ist, und dass $\begin{smallmatrix}b, & n\\ c, & m\end{smallmatrix}$ sich in $\begin{smallmatrix}R\\S\end{smallmatrix}$ bezüglich entsprechen. Ferner ist auch $\begin{smallmatrix}d\\a\end{smallmatrix}$ ein Paar entsprechender Geraden. Denn d geht durch den Punkt $\mathfrak{d}'$ und schneidet die Geraden g und n, während a durch den entsprechenden Punkt $\mathfrak{a}'$ geht und die entsprechenden Geraden g und m schneidet. Daraus folgt, dass $\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}$ ein Paar entsprechender

---

[1]) Schröter, *Math. Annalen*, Bd. XX. p. 231.

Punkte auf der Doppelgeraden g ist. Da ausserdem $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ Paare entsprechende Punkte von $\frac{R}{S}$ auf dieser Doppelgeraden sind und das Doppelverhältnis (1324) $= -1$ wegen der harmonischen Lage der Geraden a, b, c, d ist, so ist auch $\frac{3}{4}$ ein Paar entsprechender Punkte. Es findet sich mithin auf g eine genau aus vier Punkten bestehende Gruppe vor. Darum ist g Träger einer Punktdoppelinvolution (1. Hilfssatz). Ferner entspricht der mit | 3 c' | identischen Geraden c von R die mit | 4 b' | identische Gerade d in S. Infolgedessen ist auch umgekehrt $\frac{m}{n}$ ein Paar entsprechender Geraden von $\frac{R}{S}$, indem m durch b' geht und die Geraden b und c schneidet, während n durch a' geht und die Geraden c und d schneidet. Die Geraden m, n entsprechen sich also in $\frac{R}{S}$ wechselseitig. Das durch m, n und die Doppelgerade g bestimmte Hyperboloid H (2) ist mithin ein sich selbst entsprechendes. Nun ist es klar, dass $\frac{a, b, c, d}{b, c, d, a}$ Paare entsprechender Geraden sowie $\frac{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}}$ und $\frac{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{b}', \mathfrak{a}'}$ Paare entsprechender Punkte von $\frac{R}{S}$ sind. Die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ bilden also eine vollzählige Gruppe. Da sie ausserdem weder auf einer Geraden noch in einer Ebene liegen, so besteht nach dem beim vorigen Systeme bewiesenen Satze (p. 12) eine jede Gruppe aus höchstens vier Punkten. R und S bilden also ein doppelinvolutorisches System.

Einer jeden Erzeugenden x von H (2), die zu derselben Schar wie g gehört, entspricht, wenn sie als eine Gerade des Raumes R aufgefasst wird, in S offenbar eine Erzeugende y desselben Hyperboloides und derselben Schar. Denkt man sich x auf H (2) beweglich, so entspricht demnach der von x erzeugten Regelschar dieselbe Regelschar als Erzeugnis von y. Wir haben mithin zwei auf einander liegende projektivische Regelscharen vor uns. Diese befinden sich in hyperbolisch involutorischer Lage, weil g eine reelle Doppelgerade ist, und m, n sich wechselseitig entsprechen. Es existiert mithin noch eine zweite leicht zu konstruierende reelle Doppelgerade dieser Involution; sie sei mit h bezeichnet. Diese Linie h ist auch eine Doppelgerade unserer Räume und ausserdem Träger einer Punktdoppelinvolution, da ihre Schnittpunkte mit dem Geradenquadrupel a, b, c, d ein Punktquadrupel sind (1. Hilfssatz).

Unser System hat weder einen reellen Doppelpunkt noch eine reelle Doppelebene und besitzt ausser g und h keine fernere reelle Doppelgerade.

Existierte nämlich hier ein reeller Doppelpunkt, so dürfte er weder auf g noch auf h liegen, weil diese Doppelgeraden als Träger doppelinvolutorischer Punktsysteme keinen reellen Doppelpunkt enthalten (1. Hilfssatz). Die durch einen etwaigen reellen Doppelpunkt gehende und die Doppelgeraden g und h schneidende Gerade müsste also eine reelle Doppelgerade sein. Dies ist aber unmöglich, weil alsdann ihre Schnittpunkte mit g und h reelle Doppelpunkte der letzteren Geraden wären. Gäbe es ferner hier eine reelle Doppelebene, so müsste sie mindestens eine

der Geraden g und h in einem Punkte schneiden. Da dieser offenbar ein reeller Doppelpunkt sein müsste, so ist dies wiederum nicht möglich. Endlich darf hier ausser g und h keine fernere reelle Doppelgerade vorkommen. Denn wär k eine solche, so dürfte sie weder g noch h schneiden, weil sich sonst entweder auf g oder auf h ein reeller Doppelpunkt ergeben würde. Durch g, h, k wäre also ein nicht zerfallendes Hyperboloid bestimmt. Wäre nun a irgend eine Gerade, welche die Geraden g, h, k sämtlich schnitte, und b, c, d die zu ihr gehörigen Quadrupelgeraden, so würden wir genau die Figur erhalten, an der das geschart doppelinvolutorische System abgeleitet wurde, und schliesslich auf den Widerspruch geraten, dass das Punktquadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auch auf einer Geraden läge.

Jede Punktgruppe, die auf keiner der Doppelgeraden g und h liegt, besteht genau aus vier weder in einer Ebene noch auf einer Geraden liegenden Punkten, weil sich im entgegengesetzten Falle entweder reelle Doppelebenen oder reelle von g und h verschiedene Doppelgerade ergeben würden.

Sei $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ ein beliebiges, auf keiner der beiden reellen Doppelgeraden liegendes Punktquadrupel. Die Gegengeraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ dieses Quadrupels dürfen weder g noch h schneiden. Denn schnitte $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$ etwa g, so müsste auch $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ dieselbe Gerade g schneiden und diese Schnittpunkte müssten sich wechselseitig in R und S entsprechen. Dies ist aber unmöglich, weil g als Träger einer Doppelinvolution lauter Gruppen enthält, die genau aus vier Punkten bestehen (1. Hilfssatz). Durch g, $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$, $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ ist also ein nicht zerfallendes Hyperboloid bestimmt, das offenbar sich selbst entspricht. Statt von dem Hyperboloide $H(^2)$ auszugehen, könnte in derselben Weise dieses letztere Hyperboloid der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, ohne an der Kollinearität von R und S etwas zu ändern. Dann läge auf diesem zweiten Hyperboloide, so wie auf $H(^2)$, ausser g noch eine zweite reelle Doppelgerade h', welche die Gegengeraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}\,|$ harmonisch trennen müsste. Da aber ausser g nur noch die einzige reelle Doppelgerade h existiert, so muss h' mit h indentisch sein. Dies giebt den Satz, dass die Gegengeraden eines beliebigen Punktquadrupels und die zwei reellen Doppelgeraden dieses Systems vier harmonische Gerade einer Regelschar sind.

Wir können mithin folgende Sätze aussprechen:

„Beim elliptisch doppelinvolutorischen Systeme existieren nur zwei reelle Doppelgerade. Reelle Doppelpunkte oder reelle Doppelebenen sind nicht vorhanden. Jede (reelle) Punktgruppe besteht genau aus vier Punkten. Die vier Punkte einer jeden Punktgruppe, die sich auf einer der beiden reellen Doppelgeraden befindet, sind vier harmonische Punkte und bilden ein Punkt-

quadrupel einer bestimmten Doppelinvolution auf der betreffenden Geraden. Die vier Punkte einer jeden Gruppe, die auf keiner der beiden reellen Doppelgeraden liegt, befinden sich weder auf einer Geraden noch in einer Ebene, sodass sie als die Ecken eines Tetraeders angesehen werden können. Die zwei Gegengeraden eines jeden Punktquadrupels der letzteren Art schneiden keine der beiden reellen Doppelgeraden, liegen vielmehr mit ihnen hyperboloidisch und werden von ihnen harmonisch getrennt. Die Gegenpunkte sämtlicher Punktquadrupel sind entsprechende Punktepaare eines geschart-involutorischen Systems ohne reelle Involutionsachsen [1])".

Es möge hier noch eine für das Folgende wichtige Anmerkung folgen.

Die vier Geraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}'\,|$, $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|$, $|\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}'\,|$, $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|$ sind vier harmonische Erzeugende eines Hyperboloides $H_1(^2)$, das wie $H(^2)$ m und n zu Leitlinien hat. Denn es ist $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}') = (\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}) = -1$. Da diese Geraden ausserdem augenscheinlich ein Quadrupel unseres Systems bilden, so ist das durch sie bestimmte Hyperboloid $H_1(^2)$ ein sich in R und S entsprechendes. Bewegt sich eine Gerade n auf $H_1(^2)$ als Erzeugende derselben Schar wie m und n, so entspricht ihr, wenn sie als eine Linie von R aufgefasst wird, in S eine Gerade v, welche nach einander die Lagen sämtlicher Erzeugenden derselben Schar von $H_1(^2)$ annimmt. Die von n und v erzeugten auf einander liegenden projektivischen Regelscharen befinden sich in involutorischer Lage, weil m und n sich wechselseitig entsprechen. Diese Involution ist aber im Gegensatz zu der analogen auf $H(^2)$ nicht eine hyperbolische, sondern eine elliptische. Denn wäre sie eine hyperbolische, so müssten ihre Doppelgeraden auch reelle von g und h verschiedene Doppelgeraden unseres Systems sein, was unmöglich ist. Es existiert mithin ein bestimmtes reelles konjugiertes Geradenpaar p, q dieser Involution auf $H_1(^2)$, welches das Geradenpaar m, n harmonisch trennt. Die Schnittpunkte $\mathfrak{p}_1 = (p, |\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}'\,|)$, $\mathfrak{q}_1 = (q, |\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|)$, $\mathfrak{r}_1 = (p, |\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}'\,|)$, $\mathfrak{s}_1 = (q, |\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|)$ bilden offenbar ein Punktquadrupel unseres Systems.

---

[1]) Schröter, *Math. Annalen* Bd. XX. p. 231.

B. Ausser diesen vier Arten doppelinvolutorischer Systeme giebt es keine anderen mehr.

Kommt bei zwei reell kollinearen einander durchdringenden Räumen R und S wenigstens eine Punktgruppe vor, die genau vier Punkte enthält, und besteht jede der übrigen Punktgruppen aus höchstens vier Punkten, so ist das von diesen Räumen gebildete System eines der vier oben konstruierten. Dies ist die präciser formulierte Behauptung:

„In der Nähe eines beliebigen Punktes im Raume kann man im vorliegenden Systeme, welcher Art es auch sei, stets Punkte angeben, deren zugehörige Gruppen genau aus vier Punkten bestehen".

Beweis. Es sei K eine Kugel von beliebiger Grösse, innerhalb deren jener Punkt liegt. Bestünden nun sämtliche Gruppen, von denen wenigstens je ein Punkt innerhalb K liegt, aus weniger als vier Punkten (aus mehr als vier Punkten darf hier nach Voraussetzung keine Gruppe bestehen), so müssten unter dreizehn im Inneren von K gelegenen Punkten, von denen keine vier in einer Ebene sich befinden, und die sonst beliebig sein dürften, jedenfalls mindestens fünf derart beschaffen sein, dass die ihnen zugehörigen Gruppen genau gleich viel Punkte, etwa je n ($n < 4$) enthielten. Setzte ich dann den Raum R mit einem dritten Raume T dadurch in kollineare Beziehung, dass ich jedem Punkte von R den jedesmaligen $n + 1^{\text{ten}}$ Gruppenpunkt in unserem von R und S gebildeten Systeme entsprechen liesse, so müssten R und T identisch sein, weil sie jene fünf Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, zu Doppelpunkten hätten. Es müsste mithin der jedesmalige $n + 1^{\text{te}}$ Gruppenpunkt mit dem jedesmaligen ersten identisch sein, und mithin, da $n < 4$ ist, jede Gruppe aus höchstens drei Punkten bestehen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, nach der eine Gruppe genau vier Punkte enthält. Es müssen also innerhalb K Punkte existieren, deren zugehörige Gruppen genau aus vier Punkten bestehen, wie klein auch K gewählt werden möge.

Es seien nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ drei beliebige Punktquadrupel, die nur in dem Falle, wenn alle drei auf Geraden oder in Ebenen liegen, der

Bedingung unterworfen sein mögen, dass von den letzteren Geraden oder Ebenen alsdann keine zwei zusammenfallen dürfen. Derartige Punktquadrupel müssen nach dem soeben bewiesenen Satze stets vorhanden sein.

Befinden sich die Punkte zweier unter diesen Quadrupeln in einer Ebene, nicht aber auf einer Geraden, so können die des dritten nicht auf einer Geraden liegen. Denn alsdann müsste diese Gerade Träger einer Doppelinvolution (1. Hilfssatz) und jene Ebene Träger eines ebenen doppelinvolutorischen Systems (2. Hilfssatz) sein, was unmöglich ist. Die Gerade dürfte nämlich nicht in dieser Ebene liegen, weil diese nur eine reelle Doppelgerade mit einer elliptischen Punktinvolution enthält (2. Hilfssatz); sie dürfte aber die Ebene auch nicht schneiden, weil sonst ihr Schnittpunkt ein reeller Doppelpunkt auf der Geraden wäre, was nicht möglich ist (1. Hilfssatz).

Alsdann sind nur noch folgende drei Fälle denkbar: entweder sind diese drei Punktquadrupel sämtlich auf Geraden oder sämtlich in Ebenen gelegen, oder es befinden sich die Punkte wenigstens eines derselben weder auf einer Geraden noch in einer Ebene.

Erster Fall: Die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ sind sämtlich auf Geraden gelegen, etwa auf g, g', g''. Jede dieser drei nach Voraussetzung von einander verschiedenen Geraden ist Träger einer Doppelinvolution und keine unter ihnen enthält daher reelle Doppelpunkte (1. Hilfssatz). Diese drei Geraden dürfen sich also nicht schneiden, indem ihre etwaigen Schnittpunkte reelle Doppelpunkte sein müssten. Durch g, g', g'' ist daher ein nicht zerfallendes Hyperboloid eindeutig bestimmt. Sind nun a, b, c, d diejenigen Erzeugenden der anderen Schar dieses sich selbst entsprechenden Hyperboloides, die der Reihe nach durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehen, und werden ihre Schnittpunkte mit der Erzeugenden g' und g'' mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ bezeichnet, so bilden a, b, c, d ein Linienquadrupel und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ zwei Punktquadrupel. Das vorliegende System ist mithin ein geschart doppelinvolutorisches, weil diese Figur mit derjenigen identisch ist, aus der das letztere abgeleitet wurde.

Zweiter Fall: Die drei Punktquadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ liegen sämtlich in Ebenen, etwa in ε, ε', ε''. Jede dieser drei Doppelebenen ist Träger eines ebenen doppelinvolutorischen Systems (2. Hilfssatz). Es existiert mithin in jeder nur eine einzige reelle Doppelgerade (2. Hilfssatz). Da ferner die Schnittlinie zweier Doppelebenen eine Doppelgerade ist, so schneiden sich die Ebenen ε, ε', ε'' in einer und derselben Geraden g. Weil nun durch g drei von einander verschiedene Doppelebenen hindurchgehen, so ist jede durch g gelegte Ebene eine

Doppelebene. Ohne weitere Ausführung ist jetzt wohl klar, dass hier ein planar doppelinvolutorisches System vorliegt.

Dritter Fall: Die Punkte eines der drei Punktquadrupel liegen weder auf einer Geraden noch in einer Ebene. Es seien dies die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.

Bewegt sich bei einer veränderlichen Punktgruppe 1, 2, 3, 4 der Punkt 1 auf der Geraden $|\,\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\,|$, so bewegt sich der Punkt 3 gleichfalls auf dieser Linie. Die von 1 und 3 erzeugten Punktreihen sind projektivisch und befinden sich in involutorischer Lage. Dies lehrt die einfachste Ueberlegung.

Behauptet wird nun: Das vorliegende System ist ein hyperbolisch oder elliptisch doppelinvolutorisches, je nachdem die von 1, 3 gebildete Involution eine hyperbolische oder elliptische ist.

Beweis. Im ersteren Falle, wo die von 1, 3 auf $|\,\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\,|$ erzeugte Involution eine hyperbolische ist, seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ihre Doppelpunkte. Diesen Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ mögen, indem sie als Punkte von R aufgefasst werden, in S die Punkte $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n}'$ entsprechen, die auf der Gegengeraden $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,|$ liegen müssen. Die Geraden $g = |\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,|$ und $h = |\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}'\,|$ sind alsdann Doppelgerade unserer Räume. Als solche sind sie Träger je zweier auf einander liegenden projektivischen Punktreihen von R und S. Diese Punktreihen auf g und h befinden sich ferner in involutorischer Lage, weil die Punktepaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ auf g und $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ auf h sich in R und S wechselseitig entsprechen.

Hierbei sind nur zwei Fälle denkbar: Von den beiden Involutionen auf g und h ist wenigstens eine hyberbolisch, oder beide sind elliptisch.

Im ersteren Falle möge g Träger der hyperbolischen Involution sein mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ als (reellen) Doppelpunkten. Die Kollinearität von $\frac{R}{S}$ ist durch die fünf Paare entsprechender Punkte $\frac{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{g}}{\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{g}}$ vollständig bestimmt. Das System ist mithin ein hyperbolisch doppelinvolutorisches (S. 13).

Der letztere Fall kann niemals eintreten. Wären nämlich beide Punktinvolutionen auf g und h elliptisch, so müsste sowohl auf g als auch auf h je ein reelles Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ existieren, welches das Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ resp. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ harmonisch trennte. Da die Geraden g und h sich nicht schneiden, weil sonst, der Voraussetzung zuwider, die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in einer Ebene liegen müssten, und da ferner das Doppelverhältnis $(\mathfrak{m}\ \mathfrak{m}'\ \mathfrak{v}\ \mathfrak{v}') = (\mathfrak{n}\ \mathfrak{n}'\ \mathfrak{w}\ \mathfrak{w}') = -1$ wäre, so müsste durch die vier Geraden $|\,\mathfrak{m}\ \mathfrak{n}\,|$, $|\,\mathfrak{m}'\ \mathfrak{n}'\,|$, $|\,\mathfrak{v}\ \mathfrak{w}'\,|$, $|\,\mathfrak{w}\ \mathfrak{v}'\,|$ ein nicht zerfallendes sich selbst entsprechendes Hyperboloid H $(^2)$ bestimmt sein. Es müssten daher die Erzeugenden a, b, c, d von H $(^2)$, welche durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gingen und derselben Schar wie g und h angehörten,

eine Liniengruppe von R und S bilden. Die erwähnte Regelschar müsste offenbar in R und S sich selbst entsprechen. Wir hätten somit auf H $(^2)$ zwei auf einander liegende projektivische Regelscharen mit g und h als reellen Doppelgeraden und mit a, b, c, d als Liniengruppe. Wären a, b, c, d sämtlich von einander verschieden, so müsste hier eine Doppelinvolution vorliegen (1. Hilfssatz). Dies ist aber unmöglich, weil eine Doppelinvolution keine reellen Doppelelemente besitzt (1. Hilfssatz), während hier g und h reelle Doppelgerade wären. Die Linien a, b, c, d, dürften aber auch nicht zusammenfallen, weder in eine einzige, noch in zwei Gerade. Im ersteren Falle müssten nämlich die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf einer Geraden liegen, was gegen die Voraussetzung wäre, und im letzteren die Geraden a, c und b, d als mit den Gegengeraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$ und $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,|$ identisch, g und h schneiden, was sie doch als Erzeugende derselben Schar wie g und h nicht thun dürften. Da hierdurch alle denkbaren Fälle als unmöglich nachgewiesen sind, so ist damit gezeigt, dass die Geraden a, b, c, d überhaupt unmöglich sind und mit ihnen das Hyperboloid H $(^2)$ und die Annahme, welche auf das letztere führte, dass nämlich beide Punktinvolutionen auf g und h elliptische seien.

Ist hingegen die von 1, 3 auf $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$ gebildete Involution eine elliptische, so existiert bekanntlich ein reelles konjugiertes Punktepaar $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$ derselben, welches das Paar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ harmonisch trennt. Als konjugierte Punkte dieser Involution sind $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$ Gegenpunkte eines Punktquadrupels. Die beiden anderen Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$ dieses Quadrupels liegen offenbar auf der Geraden $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,|$ und trennen das Punktepaar $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ harmonisch. Durch die Geradenpaare $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,|$, $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|$, $|\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'\,|$, $|\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}'\,|$ ist mithin ein sich selbst entsprechendes Hyperboloid H $(^2)$ bestimmt. Ein analoges Hyperboloid H_1 $(^2)$ hat die Geraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}'\,|$, $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'\,|$, $|\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}'\,|$, $|\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}'\,|$ zu Erzeugenden. Die Gegengeraden sämtlicher Punktquadrupel auf jedem dieser beiden Hyperboloide bilden konjugierte Geradenpaare einer Involution, die Erzeugende auf dem betreffenden Hyperboloide sind. Der Beweis dafür kann in der früher schon häufig angewandten Weise geführt werden.

Hier sind nun zwei Fälle denkbar: Entweder ist mindestens eine dieser von den Gegengeraden erzeugten Involutionen hyperbolisch, etwa die auf H $(^2)$, oder es sind beide elliptisch.

Im ersteren Falle ist also jene Involution auf H $(^2)$ eine hyperbolische. (Dass dies möglich ist, wurde durch die früher vorgenommene Konstruktion des elliptisch doppelinvolutorischen Systems dargethan). Ob nun die entsprechende Involution auf H_1 $(^2)$ elliptisch oder hyperbolisch ist, bleibe vorläufig dahingestellt. Die reellen Doppelgeraden der Involution auf H $(^2)$ seien g und h. Werden die Geraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,|$,

$| \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}' |$, $| \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}' |$, $| \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}' |$ bezüglich mit a, b, c, d, die Gegengeraden $| \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} |$ und $| \mathfrak{b}\,\mathfrak{d} |$ mit m und n und die Schnittpunkte der Geraden a, b, c, d mit der Doppelgeraden g mit 1', 2', 3', 4' bezeichnet, so erhält man genau die Figur, welche dem Nachweise des elliptisch doppelinvolutorischen Systems zu Grunde gelegt wurde, mit der einzigen Abweichung in der Bezeichnung, dass die Punkte 1, 2, 3, 4 jener Figur hier 1', 2', 3', 4' heissen. Das vorliegende System ist mithin ein elliptisch doppelinvolutorisches.

Da das Hyperboloid $H_1^{(2)}$ hier dem gleich bezeichneten dort entspricht, so erfahren wir somit nachträglich, dass die von den Gegengeraden auf $H_1^{(2)}$ gebildete Involution hier eine elliptische ist.

Es ist nun nur noch der Fall zu erledigen, in dem die Involution auf $H_1^{(2)}$ eine elliptische ist, während der Charakter der Involution auf $H_1^{(2)}$ vorläufig unbestimmt gelassen wird. Alsdann existiert ein reelles konjugiertes Geradenpaar p, q dieser Involution auf $H_1^{(2)}$, welches die Erzeugenden $| \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} |$, $| \mathfrak{b}\,\mathfrak{d} |$ harmonisch trennt. Die Schnittpunkte $\mathfrak{p}_1 = (p, | \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}' |)$, $\mathfrak{q}_1 = (q, | \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}' |)$, $\mathfrak{r}_1 = (p, | \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}' |)$, $\mathfrak{s}_1 = (q, | \mathfrak{d}\,\mathfrak{b}' |)$ bilden offenbar ein Punktquadrupel von R und S. Seite 19 hatten wir bei der dortigen Anmerkung eine ganz ähnliche Figur mit genau denselben Bezeichnungen. Hier ist es jedoch ohne weiteres nicht erlaubt, darauf zu schliessen, dass das vorliegende System mit jenem identisch ist, weil es zweifelhaft ist, ob jene nicht ursprünglich konstruierte, sondern nur abgeleitete Figur in allen ihren Teilen zur Kongruenz mit der vorliegenden gebracht werden kann. Bedenkt man indess, dass dort die Geraden $| \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}' |$, $| \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}' |$, $| \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}' |$, $| \mathfrak{d}\,\mathfrak{b}' |$ vier harmonische Erzeugende eines Hyperboloides und die Geraden $| \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} |$, $| \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{r}_1 |$, $| \mathfrak{b}\,\mathfrak{d} |$, $| \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{s}_1 |$ vier harmonische Erzeugende der anderen Schar desselben Hyperboloides sind, und dass das Analoge auch von den gleich bezeichneten Geraden hier gilt, so ist es klar, dass zwei kollineare Räume U und V von der Eigenschaft existieren müssen, dass, wenn die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ jenes Systems als Punkte von U angesehen werden, diesen in V die gleichbezeichneten Punkte des vorliegenden Systems entsprechen. Denke ich mir nun das ganze dortige elliptisch doppelinvolutorische System als ein Gebilde von U, so entspricht ihm in V auch ein elliptisch doppelinvolutorisches System. Dieses letztere ist aber offenbar mit dem vorliegenden identisch. Damit ist also bewiesen, dass das vorliegende System ein elliptisch doppelinvolutorisches ist. Jetzt ist es auch evident, dass die von den Gegengeraden auf $H^{(2)}$ erzeugte Involution eine hyperbolische sein muss.

Hiermit ist der Beweis erbracht, dass es ausser den vier angegebenen keine

ferneren Arten von reell doppelinvolutorischen Systemen giebt. Nebenbei ergaben sich folgende Sätze:

„Kommen bei einem doppelinvolutorischen Systeme drei reelle Doppelgerade vor, so ist es ein geschartes, enthält es drei reelle Doppelebenen, so ist es ein planares. Existiert darin ein Quadrupel, dessen Punkte weder auf einer Geraden, noch in einer Ebene liegen, so ist das System ein hyperbolisch oder elliptisch doppelinvolutorisches, je nachdem die Punktinvolutionen hyperbolisch oder elliptisch sind, die von den Gegenpunkten derjenigen Gruppen erzeugt werden, welche sich auf den Gegengeraden jenes Quadrupels befinden.“

Gleichzeitig lernten wir folgende Konstruktion der reellen Doppelelemente bei den einzelnen Systemarten kennen:

„Beim geschart doppelinvolutorischen Systeme ist die Verbindungslinie zweier beliebigen entsprechenden Punkte von R und S eine reelle Doppelgerade. Andere reelle Doppelelemente giebt es hier nicht.“

„Beim planar doppelinvolutorischen Systeme geht im allgemeinen durch jeden Punkt eine reelle Doppelebene. Man findet diese, indem man durch die übrigen Punkte derjenigen Gruppe, zu der jener Punkt gehört, eine Ebene legt. Der Schnittpunkt der Gegengeraden dieser Gruppe ist ein reeller Doppelpunkt. Verbindet man den in derselben Weise bestimmten Doppelpunkt bei einem zweiten in einer anderen Ebene gelegenen Punktquadrupel mit dem ersteren durch eine Gerade, so ist dies diejenige Gerade, die lauter Doppelpunkte enthält. Dagegen ist die Schnittlinie der beiden Gruppenebenen diejenige Doppelgerade, durch welche lauter Doppelebenen gehen. Die Konstruktion ist somit hier wie beim vorigen System in allen Stücken linear.“

„Bestimmt man beim hyperbolisch doppelinvolutorischen System auf einer der beiden Gegengeraden eines beliebigen Quadrupels die stets reell vorhandenen Doppelpunkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ derjenigen Involution, die von den Gegenpunkten sämtlicher auf diesen Gegengeraden gelegenen Punktgruppen gebildet wird, so entspricht dem Punkte $\mathfrak{m}$ in unseren kollinearen Räumen in beiderlei Sinn ein und derselbe Punkt $\mathfrak{m}'$ und ebenso dem Punkte $\mathfrak{n}$ ein bestimmter Punkt $\mathfrak{n}'$. Die Geraden $g = |\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'|$ und $h = |\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}'|$ sind die zwei reellen Doppelgeraden des Systems. Beide Geraden sind Träger von Punktinvolutionen, deren Paare konjugierter Punkte sich in R und S wechselseitig entsprechen. Die eine dieser Involutionen, etwa die auf g, ist notwendig hyperbolisch und die andere elliptisch. Die reellen Doppelpunkte der

ersteren seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Diese sind die zwei reellen Doppelpunkte des Systems, und die Ebenen $[\mathfrak{g}\ h]$ und $[\mathfrak{h}\ h]$ die beiden reellen Doppelebenen desselben."

„Beim elliptisch doppelinvolutorischen System giebt es nur zwei reelle Doppelelemente, nämlich die beiden reellen Doppelgeraden. Diese lassen sich auf folgende Art bestimmen: Man konstruiere auf der Gegengeraden $|\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\ |$ einer beliebigen Punktgruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ dasjenige Paar konjugierter kunkte $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$ der dieser Gegengeraden zugehörigen Punktinvolution, welches das Paar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ harmonisch trennt. Dieses Paar $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$ ist reell, weil jene Involution notwendig eine elliptische ist. Die Punkte $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$ sind Gegenpunkte eines Quadrupels dessen beide anderen Gegenpunkte $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{c}'$ heissen mögen. Die letzteren Punkte liegen auf der Gegengeraden $|\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{d}\ |$ und trennen daselbst das Punktepaar $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ harmonisch. Durch die vier Geraden $|\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}'\ |$, $|\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}'\ |$, $|\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{c}'\ |$, $|\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{d}'\ |$ ist ein sich selbst entsprechendes Hyperboloid $H(^2)$ bestimmt, während ein zweites derselben Art, das mit $H_1(^2)$ bezeichnet werden möge, die Geraden $|\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{c}'\ |$, $|\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}'\ |$, $|\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{a}'\ |$, $|\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{b}'\ |$ zu Erzeugenden hat. Die Erzeugenden der anderen Schar bei beiden Hyperboloiden, zu denen also auch die Gegengeraden $|\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\ |$ und $|\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{d}\ |$ gehören, entsprechen sich in R und S wechselseitig, sind also involutorisch gelegen. Von diesen beiden Regelscharinvolutionen ist die eine, etwa die auf $H(^2)$, notwendig hyperbolisch, die andere, also dann die auf $H_1(^2)$, notwendig elliptisch. Die reellen Doppelgeraden der ersteren Involution sind die gesuchten reellen Doppelgeraden des Systems."

„Die Konstruktion der reellen Doppelelemente ist also bei den beiden letzten Systemen nicht mehr linear, aber noch rein geometrisch, indem sie auf die Aufgabe hinausläuft, die Doppelelemente einer hyperbolischen Involution zu bestimmen."

Der Vollständigkeit wegen mögen hier einige Bemerkungen über imaginäre Doppelelemente bei unseren Systemen folgen. Der Beweis bietet hierbei keine Schwierigkeit, wenn man es, was sonst hier nicht geschah, für erlaubt hält, mit imaginären Gebilden in der Geometrie in derselben Weise zu operieren wie mit reellen.

Beim geschart doppelinvolutorischen Systeme existieren zwei imaginäre Doppelgerade von der Eigenschaft, dass beide von sämtlichen reellen Doppelgeraden geschnitten werden, dass jeder Punkt derselben ein Doppelpunkt und jede durch sie gelegte Ebene eine Doppelebene ist.

Beim planar doppelinvolutorischen Systeme giebt es nur zwei imaginäre Doppelpunkte und zwei imaginäre Doppelebenen, dagegen unendlich viele imaginäre

Doppelgerade. Die ersteren liegen auf der reellen Doppelgeraden g; die durch diese imaginären Punkte und die Doppelgerade h bestimmten zwei Ebenen sind die zwei imaginären Doppelebenen. Diejenigen zwei Strahlenbüschel in diesen Ebenen, welche die imaginären Doppelpunkte zu Mittelpunkten haben, bestehen aus lauter Doppelstrahlen des Systems. Diese imaginären Doppelgeraden sind durchweg punktierte Gerade und Träger von Punktdoppelinvolutionen, deren Quadrupel gleichzeitig Quadrupel des Systems sind.

Beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme giebt es zwei imaginäre Doppelpunkte, ebenso viele imaginäre Doppelebenen und vier imaginäre Doppelgerade. Die letzteren sind Träger von Punktdoppelinvolutionen.

Beim elliptisch doppelinvolutorischen Systeme existieren vier imaginäre Doppelpunkte und ebenso viele imaginäre Doppelebenen und Doppelgerade. Von den letzteren sind zwei sich nicht schneidende Träger von Punktinvolutionen und die beiden übrigen Träger von Doppelinvolutionen.

Auf Seite 24 wurde der Satz bewiesen, dass zwei beliebige elliptisch doppelinvolutorische Systeme stets derart in kollineare Beziehung zu einander gebracht werden können, dass einem jeden Punktquadrupel des einen ein Punktquadrupel des anderen, also auch die Doppelelemente des einen den Doppelelementen des anderen entsprechen. Dieser Satz lässt sich leicht auf alle vier Systeme ausdehnen und lautet dann:

„Zwei beliebige doppelinvolutorische Systeme derselben Art lassen sich stets derart in kollineare Beziehung zu einander bringen, dass einer jeden Punktgruppe des einen eine Punktgruppe des anderen entspricht. Hingegen ist dies bei zwei doppelinvolutorischen Systemen verschiedener Art nicht möglich.“

Von Nutzen ist dieser Satz beim Aufsuchen projektivischer Eigenschaften bei unseren Systemen, indem der Betrachtung anstatt des allgemeinen ein spezielles System zu Grunde gelegt werden kann. Liegt z. B. beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme die Doppelgerade g im Unendlichen, sind die Doppelpunkte derselben die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, ist sie ferner zu der anderen reellen Doppelgeraden h senkrecht, und ist einer der Doppelpunkte von h unendlich entfernt, so lassen sich die Punktquadrupel dieses Systems leicht konstruieren, und die Anschauung allein liefert uns eine Anzahl von Sätzen, die sich mit Hilfe jenes Satzes auf das allgemeine System übertragen lassen.

C. Doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung und Raumkurven dritter und vierter Ordnung und erster Species.

Ein Gebilde soll ein doppelinvolutorisches heissen, wenn es sich selbst in unseren Räumen R und S entspricht.

1. „Beim geschart doppelinvolutorischen Systeme ist jede sich selbst entsprechende Fläche zweiter Ordnung ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid. Die Erzeugenden der einen Schar sind lauter Doppelgerade des Systems, die der anderen Schar lassen sich zu Linienquadrupeln des Systems anordnen, die eine Doppelinvolution bilden. Es giebt dreifach unendlich viele Flächen dieser Art; sie haben sämtlich zwei sich nicht schneidende imaginäre Gerade gemein, die identisch sind mit den Involutionsachsen des aus diesem System abgeleiteten involutorischen Systems."

Beweis. Ist $F^{(2)}$ eine beliebige doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ drei beliebige Punkte derselben, so müssen offenbar auch die zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{x}$ gehörigen Gruppenpunkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ auf $F^{(3)}$ liegen. Nun befinden sich diese 3 Punktquadrupel auf je einer Geraden, die eine Doppelgerade des Systems ist (S. 10). Folglich gehören diese 3 Geraden der Fläche $F^{(2)}$ ganz an. $F^{(2)}$ muss daher ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid von der oben angegebenen Beschaffenheit sein. Ausserdem ist hieraus ersichtlich, dass man hier dadurch alle möglichen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung erhält, dass man zu Bestimmungsstücken derselben je drei beliebige Doppelgerade des Systems nimmt.

Es sei g eine beliebige nicht auf $F^{(2)}$ gelegene Doppelgerade und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ ein veränderliches Punktquadrupel auf g. Das veränderliche Paar konjugierter Punkte derjenigen Involution, die der Geraden g in Bezug auf $F^{(2)}$ angehört, möge $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sein. Die von den Gegenpunkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}$ jenes veränderlichen Quadrupels $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ gebildete Involution ist eine elliptische (1. Hilfssatz). Daher existiert mindestens ein reelles Punktepaar, das beiden Involutionen als ein Paar konjugierter Punkte angehört. Es sei dies das Paar $\mathfrak{v}' = \mathfrak{x}'$, $\mathfrak{w}' = \mathfrak{z}'$. Betrachte ich nun $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{z}'$, g, $F^{(2)}$ als Gebilde von R, so entsprechen ihnen $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{t}'$, g, $F^{(2)}$ in S. Da

ausserdem $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{z}'$ zwei konjugierte Punkte in Bezug auf $F^{(2)}$ sind, so müssen es auch die Punkte $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{t}'$ sein. Die beiden von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ resp. $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}$ gebildeten Involutionen haben also zwei Paare konjugierter Punkte gemein und sind also identisch. Einer beliebigen Doppelgeraden g gehört mithin in Bezug auf sämtliche sich selbst entsprechende Flächen zweiter Ordnung, wenn g keine Erzeugende derselben ist, ein und dasselbe Punktsystem zu, nämlich das von den Gegenpunkten der auf dieser Geraden befindlichen Quadrupel gebildete. Kürzer kann man dafür auch sagen: Jede Doppelgerade wird von sämtlichen Flächen dieser Art in ihren imaginären Doppelpunkten geschnitten. Da nun in jeder Ebene eine und nur eine reelle Doppelgerade sich befindet (p. 10), so schneiden mithin sämtliche sich selbst entsprechende Flächen zweiter Ordnung eine beliebige Ebene in Kegelschnitten, die sämtlich durch zwei imaginäre Punkte gehen u. s. w.

„Reelle, sich selbst entsprechende nicht zerfallende Raumkurven dritter Ordnung oder vierter Ordnung und erster Species giebt es bei diesem Systeme offenbar nicht.“

2. „Beim planar doppelinvolutorischen Systeme liegen die zwölf Punkte dreier beliebigen Punktquadrupel auf einer und nur auf einer doppelinvolutorischen Fläche zweiter Ordnung, wenn die drei Quadrupel drei verschiedenen Ebenen angehören. Jedes Punktquadrupel auf dieser Fläche besteht aus vier harmonischen Punkten desjenigen Kegelschnittes, den die Ebene des Quadrupels aus der Fläche ausschneidet.“

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ drei verschiedenen Ebenen ε, ε' und ε'' angehörige Punktquadrupel. Diese Ebenen schneiden sich in derjenigen Doppelgeraden g des Systems, die keine reellen Doppelpunkte enthält (p. 10). Die Schnittpunkte von ε, ε', ε'' mit der anderen reellen Doppelgeraden h des Systems seien $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$. Durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ geht ein sich selbst entsprechender nicht zerfallender Kegelschnitt, der $\mathfrak{h}$ und g zum Pol und zur Polare hat und g in den imaginären Doppelpunkten schneidet (3. Hilfssatz). Ein zweiter Kegelschnitt von derselben Eigenschaft geht durch die Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$. Da diese beiden Kegelschnitte in den imaginären Doppelpunkten von g zwei gemeinsame Punkte haben, so lässt sich durch dieselben ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung hindurchlegen, die offenbar sämtlich g und h zu reciproken Polaren haben. Es geht mithin von diesen Flächen eine und nur eine, etwa die Fläche $F^{(2)}$, durch den Punkt $\mathfrak{a}''$. Derjenige Kegelschnitt, den $F^{(2)}$ aus der Ebene ε'' ausschneidet, hat daher $\mathfrak{h}''$ und g zum Pol und zur Polare und schneidet g in den imaginären Doppelpunkten. Mithin entspricht er sich selbst (3. Hilfssatz) und geht daher auch

durch die Punkte b'', c'', d''. Dass $F^{(2)}$ in R und S sich selbst entspricht und die übrigen oben angeführten Eigenschaften besitzt, ist wohl jetzt ohne weiteres klar.

Bemerkenswert ist folgender Specialfall des obigen Satzes:

„Die Geraden einer beliebigen Liniengruppe dieses Systems sind vier harmonische Erzeugende eines doppelinvolutorischen Hyperboloides."

Aus der so eben gegebenen Beweisführung und Konstruktion einer doppelinvolutorischen reellen Fläche zweiter Ordnung ergeben sich fast unmittelbar noch folgende Folgerungen:

„Jede Fläche zweiter Ordnung, welche durch zwei in verschiedenen Ebenen liegende Punktquadrupel dieses Systems hindurchgeht, ist eine doppelinvolutorische, schneidet die Doppelgerade g in den imaginären Doppelpunkten derselben und hat g und h zu reciproken Polaren, wenn ausserdem die Gegengeraden jener Quadrupel sich nicht schneiden. Jede Fläche zweiter Ordnung, welche g in den imaginären Doppelpunkten schneidet, und g und h zu reciproken Polaren hat, ist eine in diesem Systeme sich selbst entsprechende."

Der letztere Satz lässt sich, wie leicht zu sehen, auch umkehren.

„Abgesehen von den doppelinvolutorischen, eine Involution bildenden Ebenenpaaren, welche sich durch die Doppelgerade h legen lassen, geht hier jede sich selbst entsprechende Fläche zweiter Ordnung durch die imaginären Doppelpunkte der Geraden g und hat g und h zu reciproken Polaren."

„Die sich selbst ensprechenden Flächen zweiter Ordnung in diesem Systeme gehören, falls von den reellen Doppelgeraden keine unendlich entfernt ist, allen möglichen Arten von Flächen zweiter Ordnung an: es kommen unter ihnen Doppelebenen vor, Ebenenpaare, die eine Involution mit h als Achse bilden, elliptische, parabolische und hyperbolische Cylinder, Kegel in doppelt unendlicher Mannigfaltigkeit, deren Spitzen auf h sich befinden, und allgemeine Flächen mit positiver und negativer Krümmung aller Art, von denen die ersteren h in zwei reellen, die letzteren in zwei imaginären Punkten schneiden. Den Erzeugenden einer Schar eines jeden doppelinvolutorischen Hyperboloides oder hyperbolischen Paraboloides entsprechen Erzeugende derselben Schar und diese zwei in R und S projektivischen Regelscharen befinden sich in doppelinvolutorischer Lage."

„Doppelinvolutorische, reelle, nicht zerfallende Raumkurven dritter und vierter Ordnung existieren offenbar auch bei diesem Systeme nicht."

3. Es bezeichne wie früher g einen reellen Doppelpunkt im hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme und a, b, c, d ein Punktquadrupel, dessen Punkte

nicht in einer Ebene liegen. Werden von $\mathfrak{g}$ nach den vier Punkten des letzteren sowie nach denen aller übrigen Quadrupel Strahlen gezogen, so bilden diese offenbar Strahlenquadrupel eines doppelinvolutorischen Systems, dem die dual gegenüber stehenden Eigenschaften eines ebenen doppelinvolutorischen Punktsystems zukommen. Durch die vier Strahlen $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{a}\,|$, $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{b}\,|$, $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{c}\,|$, $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{d}\,|$ lässt sich also ein doppelinvolutorischer Kegel zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ hindurchlegen, der die Doppelgerade h in ihren imaginären Doppelpunkten schneidet, und für den die reellen Doppelgeraden g und h zwei konjugierte Geraden sind (3. Hilfssatz). Ein zweiter Kegel zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ von derselben Eigenschaft hat den anderen reellen Doppelpunkt $\mathfrak{h}$ des Systems zur Spitze und geht gleichfalls durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Die Gegengeraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$ und $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,|$ schneiden die Doppelgeraden g und h (S. 16). Durch h und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ lässt sich mithin eine Ebene legen und durch h und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ eine zweite. Die erstere Ebene schneidet den Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ in einem Kegelschnitte, der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ geht und wegen der so eben angeführten Eigenschaften von $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ die Doppelgerade h in ihren imaginären Doppelpunkten trifft und diese Gerade und den Schnittpunkt der Ebene von $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ mit g zur Polare und zum Pole hat. Diese Ebene $[h, \mathfrak{a}]$ schneidet aber den anderen Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ in einem Kegelschnitte von derselben Eigenschaft, mithin in demselben Kegelschnitte. Die Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ schneiden sich mithin in einem Kegelschnitte $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{c}}$, der in der Ebene $[h, \mathfrak{a}] \equiv [h, \mathfrak{c}]$ liegt, und ausserdem noch, was ebenso zu zeigen ist, in einem zweiten in der Ebene $[h, \mathfrak{b}] \equiv [h, \mathfrak{d}]$ befindlichen Kegelschnitte $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\,\mathfrak{d}}$. Diese zwei Kegelschnitte bilden als Durchschnittskurve zweier doppelinvolutorischer Kegel zweiter Ordnung eine doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung. Durch diese Raumkurve geht mithin ein ganzes Büschel von Flächen zweiter Ordnung, denen, wenn sie als Gebilde des Raumes R aufgefasst werden, in S Flächen entsprechen, welche dieselbe Grundkurve haben, also Flächen desselben Büschels. In diesen zwei projektivischen Büscheln fallen drei entsprechende Flächenpaare in je eine Fläche zusammen. Es sind dies die beiden Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ und das Ebenenpaar $[h, \mathfrak{a}] \equiv [h, \mathfrak{c}]$, $[h, \mathfrak{b}] \equiv [h, \mathfrak{d}]$. Mithin haben diese zwei Büschel nicht nur die Grundkurve gemeinsam, sondern sind überhaupt identisch: jede durch diese Grundkurve gelegte Fläche zweiter Ordnung entspricht in R und S sich selbst.

„Es geht also beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme durch jedes Punktquadrupel, dessen Punkte nicht in einer Ebene liegen, eine doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung, welche in zwei die Doppelgerade h in ihren imaginären Doppelpunkten schneidende Kegelschnitte zerfällt. Jede

Fläche zweiter Ordnung des durch diese Raumkurve bestimmten Büschels ist eine doppelinvolutorische Fläche, die offenbar die Doppelgeraden g und h zu reciproken Polaren hat, durch die imaginären Doppelpunkte von h geht und die andere Doppelgerade g in einem Paare konjugierter Punkte derjenigen Involution schneidet, welche $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zu Doppelpunkten hat".

Die Spitzen der Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ sind nämlich die Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Mithin wird die Doppelgerade g von sämtlichen Flächen des Büschels in Paaren konjugierter Punkte der bezeichneten Involution geschnitten:

„In diesem Büschel kommen ausser den drei speciellen Flächen zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ und $|\,h\;\mathfrak{a}\,|$, $|\,h\;\mathfrak{b}\,|$ nur noch allgemeine doppelinvolutorische Flächen vor, deren Krümmung positiv oder negativ ist, je nachdem sie die Doppelgerade g in reellen oder imaginären Punkten schneiden" [1]).

Die Erzeugenden der letzteren Flächen, also der einschaligen Hyperboloide oder hyperbolischen Paraboloide, sind, sofern man sie nach ihrer projektivischen Zusammengehörigkeit anordnet, ganz anders gelagert wie die analogen bei den vorhergehenden Systemen. Den Erzeugenden der einen Schar entsprechen hier die Erzeugenden der anderen Schar, so dass jedes auf einer Fläche dieser Art gelegenes Linienquadrupel ein windschiefes Vierseit bildet.

Bei dem Hyperboloide $\mathrm{H}^{(2)}$, das die Seiten $|\,\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\,|$, $|\,\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\,|$, $|\,\mathfrak{c}\;\mathfrak{d}\,|$, $|\,\mathfrak{d}\;\mathfrak{a}\,|$ zu Erzeugenden hat, ist dies leicht ersichtlich. Einer beliebigen Erzeugenden x auf $\mathrm{H}^{(2)}$, die derselben Schar wie $|\,\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\,|$ angehört, entspricht, als einer Geraden von R, in S, da x und $|\,\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\,|$ als Erzeugende einer und derselben Schar sich nicht schneiden, eine Gerade y, welche die Gerade $|\,\mathfrak{b}\;\mathfrak{d}\,|$ nicht schneidet, also eine Erzeugende der anderen Schar. Mithin schneiden sich, wie behauptet wurde, x und y, und das vollständige Linienquadrupel x, y, z, t bildet ein windschiefes Vierseit.

Die Eckpunkte aller derartigen Vierseite auf $\mathrm{H}^{(2)}$ liegen auf den Kegelschnitten $\mathrm{K}^{(2)}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{c}}$ und $\mathrm{K}^{(2)}_{\mathfrak{b},\,\mathfrak{d}}$. Bewegt sich nämlich der Punkt $\mathfrak{x}$ einer veränderlichen Punktgruppe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ auf $\mathrm{K}^{(2)}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{c}}$, so bewegt sich auch sein Gegenpunkt $\mathfrak{z}$ darauf, und die von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ auf $\mathrm{K}^{(2)}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{c}}$ erzeugten projektivischen Punktreihen bilden offenbar eine elliptische Punktinvolution. Es existiert mithin ein und nur ein reelles Punktepaar $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{r}$, das die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ auf $\mathrm{K}^{(2)}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{c}}$ harmonisch trennt. Die zu

---

[1]) Schröter, *Theorie der Oberfl.* 2. Ordn. p. 166.

$\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ gehörigen Gruppenpunkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$ liegen auf $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ und trennen die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ gleichfalls harmonisch und sind die einzigen dieser Art. Die durch $\mathfrak{p}$ gehende Erzeugende von $H^{(2)}$, welche derselben Schar wie $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ angehört, sei p und die zu ihr gehörigen Gruppengeraden, mit denen sie also ein windschiefes Vierseit bildet, seien q, r, s. Es gehen dann offenbar q, r, s bezüglich durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$. Die vier Geraden p, r, $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}|$ sind Erzeugende derselben Schar von $H^{(2)}$ und schneiden den Kegelschnitt $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ in vier harmonischen Punkten, nämlich in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$. Diese Geraden müssen mithin auch $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ in vier harmonischen Punkten schneiden, weil zwei beliebige Kegelschnitte auf einem Hyperboloide von den Erzeugenden einer und derselben Schar des letzteren projektivisch getroffen werden. Von diesen Punkten sind zwei bekannt, nämlich $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$; die beiden anderen, die Schnittpunkte von p und r mit $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ seien $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{s}'$. Diese letzteren Punkte sind Gegenpunkte eines Punktquadrupels $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{s}'$, weil die Kegelschnitte $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ und $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ sich in R und S wechselseitig entsprechen und p und r Gegengeraden eines Linienquadrupels sind. Mithin ist das Punktepaar $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{s}'$ identisch mit $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$, da beide Quadrupelgegenpunkte sind, beide auf $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ harmonisch trennen, und nur ein einziges Punktepaar dieser Art existiert. Das windschiefe auf $H^{(2)}$ gelegene Vierseit p, q, r, s hat mithin $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ zu Eckpunkten. Die Punktreihen auf $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ und $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ stehen auf zwei Arten in projektivischer Beziehung zu einander, indem einerseits dem Kegelschnitte $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ von R in S $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ entspricht, und andererseits beide Kegelschnitte von den Erzeugenden derjenigen Schar, zu der $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ gehört, projektivisch getroffen werden. Diese zwei Beziehungen sind aber identisch, weil in beiden nicht nur drei, sondern sogar vier Punkten von $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$, nämlich den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ dieselben Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$ von $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ entsprechen. Damit ist nachgewiesen, dass die Erzeugenden des Hyperboloides $H^{(2)}$ sich zu je vieren derart anordnen lassen, dass sie Linienquadrupel des Systems bilden, die lauter windschiefe Vierseite sind, deren Eckpunkte auf den Kegelschnitten $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ und $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ liegen. Die Gegenseiten dieser Vierseite bilden offenbar auf $H^{(2)}$ konjugierte Geradenpaare einer elliptischen Involution.

Den Erzeugenden eines beliebigen durch $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ und $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ hindurchgehenden Hyberboloides $H_1{}^{(2)}$ kommen dieselben Eigenschaften wie dem Hyperboloide $H^{(2)}$ zu, nur sind die Eckpunkte der analogen Vierseite nicht auf $K^{(2)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ und $K^{(2)}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ gelegen, sondern auf zwei anderen Kegelschnitten. Alles ist offenbar bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass jede Erzeugende von $H_1{}^{(2)}$ ein Ordnungstrahl des Systems ist, d. h., dass auf jeder zwei auf einander folgende Gruppenpunkte liegen.

Denn alsdann braucht das über $H^{(2)}$ Gesagte bei $H_1{}^{(2)}$ nur noch wiederholt zu werden. Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt auf $K^{(2)}_{a,c}$. Sind $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ die zu $\mathfrak{x}$ gehörigen Gruppenpunkte, so sind die Geraden $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,|$ und $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{t}\,|$ offenbar zwei Ordnungsstrahlen. Zwei fernere Ordnungsstrahlen des Ordnungskegels mit der Spitze $\mathfrak{x}$ sind die Strahlen $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{g}\,|$ und $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}\,|$, weil jeder durch einen Doppelpunkt gehende Strahl ein Ordnungsstrahl ist. Nun schneiden nicht nur die beiden ersteren Strahlen sondern auch die beiden letzteren den Kegelschnitt $K^{(2)}_{b,b}$, weil $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{g}\,|$ und $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}\,|$ Strahlen der Kegel $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}_{\mathfrak{h}}$ sind, und diese beiden Kegel durch $K^{(2)}_{b,b}$ hindurchgehen (S. 29). Der Kegelschnitt $K^{(2)}_{b,b}$ hat also mit unserem Ordnungskegel vier Punkte gemeinschaftlich. Da ferner, wie leicht zu sehen ist, beiden dieselbe Punktinvolution in Bezug auf die Gerade h zukommt, so liegt $K^{(2)}_{b,b}$ ganz auf dem Ordnungskegel. Die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte der Kegelschnitte $K^{(2)}_{a,c}$ und $K^{(2)}_{b,b}$ ist mithin, wie behauptet wurde, ein Ordnungsstrahl.

„Die Erzeugenden der einschaligen Hyperboloide oder hyperbolischen Paraboloide unseres Büschels lassen sich mithin zu je vieren so anordnen, dass sie ein Linienquadrupel des Systems bilden, das ein windschiefes Vierseit vorstellt. Die Gegenseiten sämtlicher Vierseite dieser Art bilden auf ihren Flächen zwei elliptische Involutionen. Die Eckpunkte dieser Vierseite liegen auf zwei sich in R und S welchselseitig entsprechenden Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Doppelgerade h gehen.“

Jeder Ordnungsstrahl des Systems wird, wie überhaupt jede Gerade, von den Flächen des Büschels mit der Grundkurve $K^{(2)}_{a,c}$, $K^{(2)}_{b,b}$ involutorisch geschnitten. Zwei Paare konjugierter Punkte dieser Involution sind leicht anzugeben. Es sind dies die Schnittpunkte des Ebenenpaares $[h\,\mathfrak{a}]$ und $[h\,\mathfrak{b}]$ mit dem Ordnungsstrahle und die zwei auf letzterem gelegenen auf einander folgenden Gruppenpunkte, die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ heissen mögen. Der Ebene $[h\,\mathfrak{g}]$ des Raumes R entspricht in S die Ebene $[h\,\mathfrak{q}]$. Nun gehen durch h nur lauter sich selbst entsprechende Ebenenpaare. Mithin entspricht auch umgekehrt der Ebene $[h\,\mathfrak{p}]$ von S in R die Ebene $[h\,\mathfrak{q}]$. Die Involution, in welcher jeder Ordnungsstrahl von den Flächen unseres Büschels geschnitten wird, hat also mit derjenigen Involution, welche die sich selbst entsprechenden durch die Doppelgerade h hindurchgehenden Ebenenpaare auf dem Ordnungsstrahle ausschneiden, zwei Paare konjugierter Punkte gemein, ist also mit der letzteren identisch. Wir erhalten damit den Satz:

„Sämtliche Flächen unseres Büschels schneiden jeden Ordnungsstrahl in

einer hyperbolischen Punktinvolution, deren Doppelpunkte die Durchbohrungspuntke dieses Strahles mit den beiden reellen Doppelebenen des Systems sind.“

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Vorgehenden ist der folgende Satz:

„Durch zwei beliebige Punktquadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ des hyperbolisch doppelinvolutorischen Systems lässt sich entweder nur eine einzige reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung der betrachteten Art hindurchlegen, oder es gehen unendlich viele Flächen dieser Art hindurch. Das erstere findet im allgemeinen statt, das letztere nur dann, wenn die beiden Punktquadrupel auf zwei sich wechselseitig entsprechenden Kegelschnitten liegen, die durch die imaginären Doppelpunkte von h gehen und h und die Schnittpunkte ihrer Ebenen mit g bezüglich zur Polare und zum Pole haben.“

Zu doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung, die einer anderen Mannigfaltigkeit angehören, gelangt man auf folgende Weise: Es sei $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ein beliebiges Paar konjugierter Punkte der der Doppelgeraden h zugehörigen Involution. Jede durch das windschiefe Vierseit $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}\,|$, $|\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{h}\,|$, $|\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{n}\,|$, $|\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{g}\,|$ gelegte Fläche zweiter Ordnung ist eine doppelinvolutorische.

Zum Beweise dessen benütze ich einen Hilfssatz, der zunächst abgeleitet werden soll. Die Durchbohrungspunkte zweier auf einander folgenden Ordnungsstrahlen $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,|$ und $|\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,|$ einer beliebigen Punktgruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ mit den beiden reellen Doppelebenen γ, χ des Systems seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$. Die Gerade $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,|$ ist sowohl in der Doppelebene γ als auch in der Ebene $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ gelegen; sie schneidet daher die Doppelgerade h in dem Durchbohrungspunkte der letzteren mit der Ebene $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$, der $\mathfrak{e}$ heissen möge. Aus einem gleichen Grunde geht auch die Gerade $|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,|$ durch denselben Punkt $\mathfrak{e}$. Endlich liegt $\mathfrak{e}$ offenbar auch auf der Geraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$. Die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,|$ werden durch die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ harmonisch getrennt (S. 32). Dasselbe gilt von den Punktepaaren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$. Betrachten wir nun die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ als Punkte eines vollständigen, ebenen Vierecks, so hat das Dreieck, dessen Seiten durch je zwei Schnittpunkte der Gegenseiten des vollständigen Vierecks hindurchgehen, infolgedessen und wegen der bekannten Eigenschaften dieser Figur zu Eckpunkten die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und einen Punkt $\mathfrak{f}$ welcher der Schnittpunkt der Geraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{y}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,|$ ist, auf der Geraden $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$ liegt und daselbst den vierten harmonischen Punkt zu den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$ bildet. Da aber die Gegenpunkte dieses Systems konjugierte Punkte eines geschart-involutorischen Systems sind (S. 16), das g und h zu Involutionsachsen hat, so schneidet die Gerade $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,|$ beide Doppelgerade in Punkten,

welche die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ harmonisch trennen. Der eine dieser Punkte ist, wie schon gezeigt wurde, der Punkt $\mathfrak{c}$; mithin muss der andere der Punkt $\mathfrak{f}$ sein. Die Geraden $|\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{y}\,|$ und $|\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}\,|$ schneiden also beide die Doppelgerade g in dem Punkte $\mathfrak{f}$. Die beiden durch g und die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ gelegten Ebenen gehen mithin auch durch die Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{q}$. Nun sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, was unmittelbar aus ihrer Konstruktion folgt, zwei auf einander folgende Gruppenpunkte. Mithin entspricht der Ebene $[g, \mathfrak{p}]$ des Raumes R in S der Ebene $[g, \mathfrak{q}]$. Durch g gehen aber lauter sich selbst entsprechende Ebenenpaare. Es ist darum $[g, \mathfrak{p}]$, $[g, \mathfrak{q}] \equiv [g, \mathfrak{x}]$ auch ein Ebenenpaar dieser Art.

„Legt man mithin durch die Durchbohrungspunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ eines beliebigen Ordnungsstrahles $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,|$ mit den beiden reellen Doppelebenen des Systems und durch die Doppelgerade g zwei Ebenen, so sind diese konjugierte Ebenen derjenigen Involution, die g zur Axe hat und deren Paare konjugierter Ebenen sich selbst entsprechen.“

Alle Flächen jenes Büschels mit der Grundkurve $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}\,|$, $|\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{h}\,|$, $|\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{n}\,|$, $|\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{g}\,|$ schneiden den Strahl $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,|$, wie jeden anderen, involutorisch. Zwei dieser Flächen sind die Ebenenpaare $[h, \mathfrak{g}]$, $[h, \mathfrak{h}]$ und $[g, \mathfrak{m}]$, $[g, \mathfrak{n}]$. Lege ich durch die Doppelgerade g und die Durchbohrungspunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ von $|\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{b}\,|$ mit den Doppelebenen $[h, \mathfrak{g}]$ und $[h, \mathfrak{h}]$ zwei Ebenen, so erhalte ich in ihnen nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze zwei konjugierte Ebenen jener der Achse g zugehörigen elliptischen Ebeneninvolution, von der auch $[g, \mathfrak{m}]$, $[g, \mathfrak{n}]$ konjugierte Ebenen sind. Der Strahl $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,|$ wird mithin von den Flächen jenes Büschels in derjenigen Punktinvolution geschnitten, in welcher ihn die Paare konjugierter Ebenen der der Achse g zugehörigen Ebeneninvolution treffen. Da die letztere eine elliptische ist, so muss auch die erstere eine elliptische sein. Weil ferner durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auch ein Paar konjugierter Ebenen der letzteren Involution hindurchgeht, so enthält auch diejenige Fläche jenes Büschels, die durch den Punkt $\mathfrak{a}$ geht, den Punkt $\mathfrak{b}$. Da nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Punkt im Raume war, so heisst das: Liegt ein beliebiger Punkt $\mathfrak{a}$ auf einer Fläche unseres Büschels, so liegt auch der darauf folgende Gruppenpunkt $\mathfrak{b}$ auf ihr. Mithin ist diese Fläche eine sich selbst entsprechende.

„Sind also beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zwei beliebige konjugierte Punkte der zur Doppelgeraden h gehörigen elliptischen Punktinvolution und $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die reellen Doppelpunkte, so sind sämtliche Flächen zweiter Ordnung, welche durch das windschiefe Vierseit $|\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}\,|$, $|\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{h}\,|$, $|\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{n}\,|$, $|\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{g}\,|$ hindurch gehen, lauter sich selbst entsprechende Flächen. Diese und alle analogen Flächen, deren Mannigfaltigkeit eine

doppelt unendliche ist, schneiden die dreifach unendlich vielen Ordnungsstrahlen des Systems in je einer und derselben Punktinvolution. Dieselbe ist eine elliptische und wird durch die beiden Durchbohrungspunkte des betreffenden Ordnungsstrahles mit den reellen Doppelebenen des Systems und durch die zwei auf diesem Strahle gelegenen auf einander folgenden Quadrupelpunkte als Paare konjugierter Punkte bestimmt. Ausserdem schneiden diese Flächen sämtliche Gegengerade in den diesen letzteren zugehörigen hyperbolischen Punktinvolutionen."

Die reellen Doppelebenen γ und χ des Systems sind bei allen diesen Flächen direkt nach Konstruktion Tangentialebenen mit den reellen Doppelpunkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ des Systems als Berührungspunkten. Ist $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ein beliebiges Punktquadrupel, so schneiden daher alle diese Flächen die Ebene $[g, \mathfrak{a}]$, die mit der Ebene $[g, \mathfrak{c}]$ identisch ist, in Kegelschnitten, welche durch die Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ gehen und daselbst die Schnittlinien der beiden reellen Doppelebenen γ und χ mit der Ebene $[g, \mathfrak{a}]$ berühren. Diese Kegelschnitte berühren sich also doppelt und gehören daher einem speciellen Büschel an. Diejenigen unter jenen Flächen zweiter Ordnung, welche durch das Punktquadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ hindurchgehen, schneiden daher die Ebene $[g, \mathfrak{a}] \equiv [g, \mathfrak{c}]$ in einem und demselben Kegelschnitte. Ebenso schneiden diese letzteren Flächen die Ebene $[g, \mathfrak{b}] \equiv [g, \mathfrak{d}]$ in einem einzigen gleichfalls durch die reellen Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ gehenden Kegelschnitte. Mithin gehören alle diese letzteren Flächen einem Büschel an, das diese beiden Kegelschnitte zur Grundkurve hat. Umgekehrt ist auch jede reelle Fläche des Büschels eine Fläche der obigen Art, also sich selbst entsprechend und entweder ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid. Dies letztere folgt daraus, dass die von den Punktepaaren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ auf h gebildete Involution, welche auch den Flächen des Büschels zugehört, eine elliptische ist.

„Es gehen also durch ein beliebiges Punktquadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ des Systems auch unendlich viele sich selbst entsprechende Flächen der zweiten Mannigfaltigkeit, die wiederum ein Büschel bilden, dessen Grundkurve in zwei Kegelschnitte zerfällt. Jede Fläche dieses Büschels ist, wenn man von dem Ebenenpaare $[g, \mathfrak{a}]$, $[g, \mathfrak{b}]$ absieht, entweder ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid. Die Erzeugenden derselben lassen sich wiederum zu je vieren derart gruppieren, dass sie Linienquadrupel des Systems bilden, die lauter windschiefe Vierseite sind. Die Gegengeraden dieser Vierseite sind Erzeugende derselben Schar auf der betreffenden Fläche und bilden Paare konjugierter Geraden einer hyperbolischen Involution. Die Eckpunkte dieser

Vierseite liegen gleichfalls auf zwei Kegelschnitten, die aber durch die zwei reellen Doppelpunkte des Systems hindurchgehen."

Der Beweis der letzteren noch nicht hergeleiteten Sätze darf wohl übergangen werden. Als Folgerung ergiebt sich noch der Satz:

„Durch zwei beliebige Punktquadrupel des vorliegenden Systems lässt sich im allgemeinen eine und nur eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung, die der zweiten Mannigfaltigkeit angehört, hindurchlegen. Ein Ausnahmefall tritt nur dann ein, wenn die Punktquadrupel auf zwei sich selbst entsprechenden Kegelschnitten liegen, die durch die beiden reellen Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ des Systems gehen, ohne als Bestandteil die Doppelgerade g zu enthalten. Alsdann geht durch die beiden Punktquadrupel ein ganzes Büschel von Flächen dieser zweiten Mannigfaltigkeit.

Sämtliche sich selbst entsprechende Flächen der zweiten Mannifaltigkeit gehen durch die reellen Doppelpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ des hyperbolischen Systems, berühren daselbst die reellen Doppelebenen und schneiden die Schnittlinie h der beiden letzteren involutorisch. Diese Flächen gehören also einem Bündel an, dessen acht Grundpunkte aus den vierfach zählenden Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ bestehen. Ebenso sind die imaginären Doppelpunkte des Systems, die auf h liegen, als Grundpunkte eines zweiten Flächenbündels zweiter Ordnung aufzufassen, dem die sich selbst entsprechenden Flächen der ersteren Mannigfaltigkeit angehören. Dies soll nur ein kürzerer Ausdruck dafür sein, dass alle diese Flächen g und h zu reciproken Polaren haben, h in den imaginären Doppelpunkten und g involutorisch schneiden, wodurch sie ja als Flächen eines speciellen Bündels zweiter Ordnung vollständig charakterisiert sind.

Die sich selbst entsprechenden Flächen zweiter Ordnung, die auf die angegebenen zwei Arten erhalten werden können, gehören nicht nur den letzteren zwei Bündeln an, sondern füllen sie auch vollständig aus, d. h. jede Fläche zweiter Ordnung aus einem dieser Bündel ist auch eine doppelinvolutorische, durch eine der beiden früher angegebenen Konstruktionsarten herstellbare Fläche. Es lassen sich nämlich bei einer beliebigen Fläche eines dieser Bündel offenbar auf ihr zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ derart wählen, dass durch sie keine fernere Fläche desselben Bündels hindurch geht. Durch dieselben Punkte, die auch als Punkte zweier Quadrupel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ angesehen werden können, geht aber auch, wie schon gezeigt wurde, stets eine sich selbst entsprechende Fläche zweiter Ordnung, die demselben Bündel angehört. Mithin ist die erste Fläche mit der letzteren identisch, w. z. b. w.

Es soll nun noch nachgewiesen werden, dass andere doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung bei diesem Systeme nicht existieren. Es handelt sich hier nur um reelle Flächen.

Zunächst gibt es hier keine doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung mit den Doppelgeraden g und h als Erzeugenden. Denn es müssten sonst, wie leicht zu sehen ist, die Erzeugenden der anderen Schar dieser Fläche lauter eine Involution bildende Gegengeradenpaare sein. Diese letzteren müssten mithin die Doppelgeraden g und h in Punktinvolutionen derselben Art schneiden, d. h. diese Involutionen müssten beide entweder hyperbolisch oder beide elliptisch sein. Nun treffen aber sämtliche Gegengeradenpaare die Doppelgerade g in einer hyperbolischen und die Doppelgerade h in einer elliptischen Involution (S. 16). Dies widerspricht sich. Jene Fläche ist also unmöglich.

Ausser den sich selbst entsprechenden Ebenenpaaren, die durch eine der beiden reellen Doppelgeraden gehen und die einem unserer Flächenbündel angehören, giebt es keine doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung, welche diese Doppelgerade zur Erzeugenden hätte.

Dieser Satz lässt sich leicht auf den vorigen reduzieren.

Jede doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ in diesem Systeme schneidet, wenn wir von den in Ebenenpaare zerfallenden und schon erledigten absehen, die Doppelgerade h entweder in ihren imaginären Doppelpunkten oder in einem reellen konjugierten Punktepaare der dieser Doppelgeraden zugehörigen Involution.

Dies folgt daraus, dass $F^{(2)}$ und h beide reell sind, beide sich selbst entsprechen, und die der letzteren Geraden h zugehörige Punktinvolution eine elliptische ist.

Geht nun $F^{(2)}$ durch die imaginären Doppelpunkte von h, so schneiden, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ein beliebiges Punktquadrupel auf $F^{(2)}$ ist, die Ebenen $[h, \mathfrak{a}] \equiv [h, \mathfrak{c}]$ und $[h, \mathfrak{b}] \equiv [h, \mathfrak{d}]$ die Fläche $F^{(2)}$ offenbar in zwei Kegelschnitten, welchen dieselbe Eigenschaft zukommt, wie denjenigen, von denen wir bei der Konstruktion der doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung der ersteren Mannigfaltigkeit ausgingen (S. 31). Daraus folgt, dass $F^{(2)}$ dem ersteren unserer beiden Flächenbündel angehört.

Schneidet aber $F^{(2)}$ die Doppelgerade h in einem reellen Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der dieser Geraden zugehörigen Involution, so liegen die Geraden $|\mathfrak{m}\,\mathfrak{g}|$, $|\mathfrak{g}\,\mathfrak{n}|$, $|\mathfrak{n}\,\mathfrak{h}|$, $|\mathfrak{h}\,\mathfrak{m}|$ ganz auf dieser Fläche, so dass diese unserem Flächenbündel der zweiten Art angehört. Es schneidet nämlich $F^{(2)}$ die Doppel-

ebene $\gamma \equiv [\mathfrak{m}\ \mathfrak{n}\ \mathfrak{g}]$ offenbar in einem reellen sich selbst entsprechenden Kegelschnitte. Nun ist γ Träger eines doppelinvolutorischen Systems in der Ebene (S. 16), enthält also nur zwei Arten sich selbst entsprechender Kegelschnitte (3. Hilfssatz). Die Kegelschnitte der einen Art schneiden die reelle Doppelgerade h in imaginären Punkten und die der anderen Art zerfallen in Geradenpaare, die durch den reellen Doppelpunkt $\mathfrak{g}$ hindurchgehen. Da unser Kegelschnitt die Gerade h in reellen Punkten schneidet, nämlich in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so kann er nur ein Kegelschnitt der zweiten Art sein. Er besteht also aus dem Geradenpaar $|\mathfrak{m}\ \mathfrak{g}|$ und $|\mathfrak{n}\ \mathfrak{g}|$. Dass die Geraden $|\mathfrak{m}\ \mathfrak{h}|$ und $|\mathfrak{n}\ \mathfrak{h}|$ gleichfalls Erzeugende von $F^{(2)}$ sind, lässt sich ebenso zeigen.

Da andere sich selbst entsprechende Flächen zweiter Ordnung, falls sie reell sein sollen, nicht denkbar sind, so ist hiermit nachgewiesen, dass jede sich selbst entsprechende Fläche zweiter Ordnung einem unserer beiden Bündel angehört, dass also (reelle) doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung einer anderen Art hier nicht existieren.

Alles Vorhergehende kurz zusammenfassend, erhalten wir also folgende Sätze:

„Beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme giebt es zwei und nur zwei Bündel doppelinvolutorischer reeller Flächen zweiter Ordnung. Durch zwei beliebige Punktquadrupel des Systems gehen mindestens zwei doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung, von denen die eine dem einen und die andere dem anderen Bündel angehört. Die Flächen beider Bündel haben die reellen Doppelgeraden g und h des Systems zu reciproken Polaren und schneiden nicht nur sämtliche Gegengeraden, sondern auch sämtliche Ordnungsstrahlen involutorisch und zwar jede der ersteren in einer und derselben Involution und jeden der letzteren in zwei verschiedenen Involutionen (p. 34 und 36). Die Flächen des einen Bündels gehen durch die imaginären Doppelpunkte von h und schneiden g in der dieser Geraden im System zugehörigen Involution, während die des anderen Bündels die reellen Doppelpunkte von g enthalten und h involutorisch treffen. Die Flächen des letzteren Bündels sind nur entweder einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide oder Ebenenpaare; unter den Flächen des ersteren finden sich ausser diesen auch noch elliptisch gekrümmte Flächen und Kegel zweiter Ordnung vor. Auf den doppelinvolutorischen Flächen, welche hyperbolisch gekrümmt sind, lassen sich die Erzeugenden zu je vieren so anordnen, dass sie windschiefe Vierseite bilden, deren Eckpunkte Quadrupelpunkte des Systems sind und bei jeder Fläche auf zwei Kegelschnitten liegen.“

Die Schnittkurve zweier beliebigen reellen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung ist offenbar eine doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung und erster Species. Bei dem vorliegenden Systeme lässt sich auch umgekehrt, was bei dem folgenden durchaus nicht der Fall ist, jede reelle Raumkurve dieser Art als Durchschnitt zweier rellen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung ansehen. Durch zwei beliebige Punktquadrupel einer solchen Kurve $C^{(4)}$ gehen nämlich nach dem Früheren mindestens zwei reelle doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung. $C^{(4)}$ liegt nun entweder mindestens auf einer dieser Flächen vollständig oder auf keiner. Im letzteren Falle geht durch die Schnittkurve der beiden Flächen und durch einen beliebigen ferneren Punkt von $C^{(4)}$ eine dritte Fläche zweiter Ordnung, die also neun Punkte von $C^{(4)}$ und mithin alle enthält und sich selbst entspricht. Hieraus folgt, dass durch $C^{(4)}$ stets mindestens eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung hindurchgeht. Es lässt sich aber ausserdem mindestens noch eine andere hindurchlegen. Dem durch $C^{(4)}$ hindurchgehenden Flächenbüschel zweiter Ordnung entspricht nämlich, wenn es als ein Gebilde des Raumes R aufgefasst wird, in S ein Flächenbüschel mit derselben Grundkurve. Diese zwei projektivischen Flächenbüschel liegen also auf einander und haben, da sie eine reelle Doppelfläche enthalten, noch eine andere reelle sich selbst entsprechende Fläche gemein, w. z. b. w. (Der parabolische Fall kann hierbei wegen der cyklischen Projektivität von R und S nicht eintreten). Durch $C^{(4)}$ gehen also mindestens zwei reelle sich selbst entsprechende Flächen zweiter Ordnung. Wir können annehmen, dass diese Flächen nicht einem und demselben unserer zwei Bündel angehören. Denn wäre das der Fall, so müsste $C^{(4)}$, was aus der speciellen Natur der beiden Bündel folgt (S. 40), in zwei Kegelschnitte zerfallen. Dies kann aber im allgemeinen von $C^{(4)}$ nicht ausgesagt werden. Aber selbst in diesem Falle, wo also $C^{(4)}$ derartig zerfällt, existieren zwei Flächen mit der oben angegebenen Eigenschaft. Der Beweis dafür ist leicht zu führen, und wir übergehen ihn, da er uns auch weniger interessiert. Es sei nun $F^{(2)}$ diejenige von den zwei Flächen, die durch die reellen Doppelpunkte von g geht, während mit $F_1^{(2)}$ die andere bezeichnet werden möge, die also die imaginären Doppelpunkte von h enthält. Da die Doppelgeraden g und h reciproke Polare in Bezug auf $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ sind, so müssen von den Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche dem durch $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ bestimmten Flächenbüschel angehören, zwei auf g und zwei auf h gelegen sein. Die beiden auf h befindlichen Spitzen sind stets reell und leicht zu finden. Die Schnittpunkte der Fläche $F^{(2)}$ mit h seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$. Da sämtliche doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung desjenigen Bündels, dem $F^{(2)}$ angehört, h in der dieser Doppelgeraden

zugehörigen Punktinvolution schneiden (S. 40) und letztere eine elliptische ist, so müssen die Punkte m und n stets reell sein und ausserdem zwei gleichfalls reelle konjugierte Punkte 1 und 2 dieser Punktinvolution existieren, die das Punktepaar m, n harmonisch trennen. Diese Punkte 1 und 2, die also leicht und zwar auf rein geometrische Weise konstruiert werden können, sind die fraglichen reellen Kegelspitzen auf h. Die Punkte 1 und 2 sind nämlich offenbar zwei konjugierte Punkte in Bezug auf beide Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$, also die Doppelpunkte derjenigen Involution, welche das durch $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ bestimmte Flächenbüschel zweiter Ordnung auf h ausschneidet und mithin die Spitzen zweier Kegel dieses Büschels.

Die beiden anderen auf g gelegenen Kegelspitzen 3 und 4 sind dagegen nicht immer reell. Da dasjenige Bündel sich selbst entsprechender Flächen zweiter Ordnung, zu dem $F_1^{(2)}$ gehört, die Doppelgerade g in der dieser zugehörigen Punktinvolution schneidet (S. 40) und diese eine hyperbolische ist, so zerfallen die Flächen dieses Bündels, wenn man von den in diesem Bündel vorkommenden Kegeln absieht, in zwei Arten, je nachdem sie g in reellen oder imaginären Punkten schneiden. Schneidet $F_1^{(2)}$ die Gerade g in zwei reellen Punkten p und q, so trennen diese, als konjugierte Punkte einer hyperbolischen Involution, die Doppelpunkte g und h dieser letzteren harmonisch. Die durch p, q und g, h als konjugierte Punktepaare bestimmte Involution ist also eine elliptische; ihre Doppelpunkte, die offenbar die Spitzen der beiden fraglichen Kegel sein müssen, sind mithin imaginär. Wird dagegen g von $F_1^{(2)}$ in zwei imaginären Punkten geschnitten, so sind die Punkte 3 und 4 stets reell und in ganz ähnlicher Weise zu konstruieren wie die Punkte 1 und 2.

„Beim hyperbolisch doppelinvolutorischen Systeme lassen sich also durch jede (reelle) doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung und erster Species $C^{(4)}$ zwei reelle doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung hindurchlegen. Von diesen Flächen geht die eine $F^{(2)}$ durch die auf g befindlichen reellen Doppelpunkte des Systems, während die andere $F_1^{(2)}$ die Doppelgerade h in ihren imaginären Doppelpunkten schneidet. Durch $C^{(4)}$ gehen stets zwei reelle Kegel zweiter Ordnung, deren Spitzen sich auf der Doppelgeraden h befinden und auf rein geometrische Weise konstruiert werden können. Die zwei anderen durch $C^{(4)}$ gehenden Kegel zweiter Ordnung sind nur dann reell, wenn g von $F_1^{(2)}$ in imaginären Punkten getroffen wird. Auch diese auf g befindlichen Spitzen lassen sich alsdann auf rein geometrische Weise konstruieren.“

„Reelle, nicht zerfallende, doppelinvolutorische Raumkurven dritter Ordnung existieren auch bei diesem Systeme nicht."

Ist nämlich $C(^3)$ eine beliebige, reelle, doppelinvolutorische Raumkurve dritter Ordnung, so muss sie eine zerfallende sein. Dies ergiebt die folgende Betrachtung: Durch zwei beliebige Punktquadrupel, also auch durch zwei auf $C(^3)$ gelegene, lassen sich nach dem Früheren (S. 40) zwei reelle, doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung hindurchlegen. $C(^3)$ hat mit jeder dieser Flächen acht Punkte, mithin alle gemein. Es schneiden sich infolgedessen diese zwei reellen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung ausserdem noch in einer reellen sich selbst entsprechenden Geraden, also in einer der Doppelgeraden g und h. Es sind aber g und h zwei reciproke Polaren in Bezug auf jede dieser Flächen (S. 40). Infolgedessen muss jede von ihnen in ein Ebenenpaar zerfallen. Mithin muss auch die Teilschnittkurve $C(^3)$ dieser Flächen zerfallen.

4. Beim elliptisch doppelinvolutorischen Systeme haben wir bereits bei der Konstruktion dieses Systems zwei Mannigfaltigkeiten doppelinvolutorischer Flächen zweiter Ordnung kennen gelernt. Alle diese Flächen waren einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide. Die Flächen der einen Mannigfaltigkeit hatten die beiden reellen Doppelgeraden g und h des Systems zu Erzeugenden, während die der anderen Mannigfaltigkeit diese Doppelgeraden nur schnitten und zwar in imaginären Punkten.

Behauptet wird nun, dass es im vorliegenden Systeme ausser diesen zwei Mannigfaltigkeiten keine ferneren reellen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung giebt.

Beweis. Es sei $F(^2)$ irgend eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung in diesem Systeme. Hat nun $F(^2)$ eine der beiden reellen Doppelgeraden g und h zur Erzeugenden, etwa die Gerade g, so ist auch die andere reelle Doppelgerade eine Erzeugende derselben. Den Erzeugenden von $F(^2)$, welche derselben Schar wie g angehören, entsprechen nämlich, wenn diese als Gebilde des Raumes R aufgefasst werden, in S die Erzeugenden derselben Schar. Denn entsprächen denselben die Erzeugenden der anderen Schar, so dürfte sich unter ihnen keine Doppelgerade vorfinden, während doch hier eine, nämlich g, nach Voraussetzung vorhanden ist. Die erstere Schar ist mithin projektivisch auf sich selbst bezogen und hat daher, da sie eine reelle Doppelgerade besitzt, noch eine zweite Doppelgerade, die offenbar, wie behauptet wurde, nur die Doppelgerade h sein kann. Dass in diesem Falle $F(^2)$ eine doppelinvolutorische Fläche der ersteren bereits konstruierten Art ist, dürfte jetzt wohl ohne weiteres klar sein.

Hat aber $F^{(2)}$ die Doppelgerade g nicht zur Erzeugenden, so existiert jedenfalls mindestens ein Paar in Bezug auf diese Fläche konjugierter reeller Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, welches aus Gegenpunkten eines auf g gelegenen Punktquadrupels $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ besteht. Dies folgt daraus, dass die von den Gegenpunkten sämtlicher auf g befindlicher Quadrupel gebildete Involution eine elliptische ist (S. 19). Der Fläche $F^{(2)}$ und den in Bezug auf diese Fläche konjugierten Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ müssen nun offenbar, falls diese als Gebilde von R aufgefasst werden, in S eine Fläche zweiter Ordnung und zwei in Bezug auf diese letztere konjugierte Punkte entsprechen. Diese Fläche ist aber $F^{(2)}$ selbst und diese Punkte sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$. Diejenige Punktinvolution, die der Geraden g in Bezug auf $F^{(2)}$ zugehört, ist mithin mit derjenigen identisch, welche die Gegenpunkte der auf g befindlichen Quadrupel bilden, indem beiden zwei Paare konjugierter Punkte, nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, gemeinsam sind. Dafür kann man auch kürzer sagen: $F^{(2)}$ schneidet g in den imaginären Doppelpunkten von g. Dasselbe gilt von der Doppelgeraden h. Jede doppelinvolutorische reelle Fläche zweiter Ordnung dieses Systemes, welche die reellen Doppelgeraden g und h nicht zu Erzeugenden hat, geht daher durch die vier imaginären Doppelpunkte des Systems, die auf den Geraden g und h liegen.

In Bezug auf eine derartige Fläche $F^{(2)}$ sind die Doppelgeraden g und h zwei konjugierte Gerade. Der Schnittlinie der Polarebenen der obigen Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R muss in Bezug auf diese Fläche offenbar in S die Schnittlinie der Polarebenen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ entsprechen. Nun liegen die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auf einer Geraden, nämlich auf g; folglich müssen jene Polarebenen sämtlich durch eine und dieselbe Gerade gehen. Die Schnittlinie der beiden ersteren Polarebenen ist also identisch mit der ihr entsprechenden der beiden letzteren; sie ist daher eine reelle Doppelgerade des Systems und zwar, da dies g nicht sein darf, die Gerade h. In Bezug auf $F^{(2)}$ sind mithin g und h reciproke Polaren und Träger von zwei elliptischen, also gleichartigen Punktinvolutionen. Daraus folgt, dass alle reellen doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung, welche g und h nicht zu Erzeugenden haben, einem Büschel angehören und entweder einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide sind.

Den Erzeugenden der einen Schar von $F^{(2)}$ entsprechen die Erzeugenden derselben Schar rücksichtlich der Räume R und S. Wäre dies nämlich nicht der Fall und entsprächen den drei beliebigen Erzeugenden a, b, c der gewählten Schar die Erzeugenden a_1, b_1, c_1 der anderen Schar, so müssten sich alle Erzeugenden x der ersteren Schar mit den ihnen in S entsprechenden x_1 in Punkten eines Kegelschnittes $K_1^{(2)}$ schneiden, den die durch die Punkte $(a\ a_1)$, $(b\ b_1)$,

$(c\ c_1)$ gelegte Ebene aus $F^{(2)}$ ausschnitte. Denn es müssten sowohl die Geraden $a, b, c \ldots x$ als auch die ihnen entsprechenden Geraden $a_1, b_1, c_1 \ldots x_1$ den Kegelschnitt in zwei projektivischen Punktreihen schneiden. Diese Reihen hätten alsdann drei Punkte gemein, nämlich $(a\ a_1)$, $(b\ b_1)$, $(c\ c_1)$; sie müssten daher, wie behauptet wurde, identisch sein. Wären ferner $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$ entsprechende Gerade von $\overset{R}{S}$, so müsste offenbar dem Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ ein Kegelschnitt $K_2^{(2)}$ entsprechen, dessen Ebene durch die Punkte $(a_1\ a_2)$, $(b_1\ b_2)$, $(c_1\ c_2)$ ginge und diesem ein dritter Kegelschnitt $K_3^{(2)}$ mit den Punkten $(a_2\ a_3)$, $(b_2\ b_3)$, $(c_2\ c_3)$. Da nun die Geraden a, b, c, a_2, b_2, c_2 offenbar der ersteren Schar und die ihnen in S entsprechenden Geraden $a_1, b_1, c_1, a_3, b_3, c_3$ der zweiten Schar von $F^{(2)}$ angehörten, so müsste der dritte Kegelschnitt $K_3^{(2)}$ mit dem ersteren $K_1^{(2)}$ identisch sein, indem alsdann, wie schon bewiesen wurde, die Schnittpunkte $(a\ a_1)$, $(b\ b_1)$, $(c\ c_1)$, $(a_2\ a_3)$, $(b_2\ b_3)$, $(c_2\ c_3)$ sämtlich in einer Ebene gelegen wären. Die Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$ und mit ihnen ihre Ebenen müssten sich infolgedessen in R und S wechselseitig entsprechen und mithin auch die beiden reellen Schnittpunkte der letzteren mit der Doppelgeraden g. Letzteres ist aber nach S. 18 unmöglich. Die gemachte Annahme ist also falsch und unsere Behauptung richtig. Den Erzeugenden einer jeden Schar von $F^{(2)}$ entsprechen mithin die Erzeugenden derselben Schar.

Diese beiden zu sich selbst projektivischen Regelscharen von $F^{(2)}$ dürfen keine reellen Doppelgeraden enthalten, weil alsdann diese auch reelle Doppelgerade des Systems sein müssten, während nach Voraussetzung letztere nicht auf $F^{(2)}$ liegen. Sie dürfen mithin keine hyperbolische Involution bilden. Sie können daher nur entweder eine elliptische Involution oder eine Doppelinvolution bilden. Es stellt sich heraus, dass die eine Regelschar elliptisch involutorisch und die andere doppelinvolutorisch angeordnet ist. Wären nämlich beide elliptisch involutorisch oder beide doppelinvolutorisch angeordnet, so müsste es, wie leicht zu sehen ist, im ersteren Falle sich wechselseitig entsprechende Punktepaare und im letzteren in einer Ebene gelegene Punktquadrupel geben. Beides ist aber nach S. 18 unmöglich. Es sind mithin die Erzeugenden der einen Schar involutorisch angeordnet — sie sind mithin lauter Gegengerade von Punktgruppen — und die der anderen doppelinvolutorisch.

Aus dem Gesagten folgt ausserdem, dass $F^{(2)}$ zu der zweiten Mannigfaltigkeit der schon früher konstruierten doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung gehört. Es bilden mithin die doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung der zweiten Mannigfaltigkeit ein Flächenbüschel (S. 44).

Die doppelinvolutorischen Flächen zweiter Ordnung der ersten Mannigfaltigkeit bilden gleichfalls ein Büschel. Dies ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass die Polarebenen eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ im Raume in Bezug auf alle diese Flächen sich in einer und derselben Geraden schneiden.

Durch $\mathfrak{P}$ geht eine einzige Gerade p, welche die Doppelgeraden g und h schneidet, etwa in den Punkten $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}_1$. Die zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}_1$ gehörigen Punktquadrupel seien $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_4$ und $\mathfrak{h}_1\ \mathfrak{h}_2\ \mathfrak{h}_3\ \mathfrak{h}_4$. Die Ebenen $[g\ \mathfrak{P}]$ und $[h\ \mathfrak{P}]$ schneiden jede Fläche $F_1^{(2)}$ der fraglichen Mannigfaltigkeit, auf der also stets g und h liegen, ausser in den beiden letzteren Geraden noch in zwei ferneren Erzeugenden x_1 und y_1. Die Generatrix x_1 schneidet jedenfalls g, etwa in dem Punkte $\mathfrak{x}_1$. Sie muss daher auch h treffen. Dieser Schnittpunkt kann nur der Punkt $\mathfrak{h}_1$ sein. Die Erzeugende y_1 begegnet gleichfalls beiden Doppelgeraden, der einen in $\mathfrak{g}_1$ und der andern in einem Punkte $\mathfrak{y}_1$. Zu $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ mögen als fernere Quadrupelpunkte die Punkte $\mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4$ und $\mathfrak{y}_2\ \mathfrak{y}_3\ \mathfrak{y}_4$ gehören. Die Geraden $|\ \mathfrak{x}_1\ \mathfrak{h}_1\ |$, $|\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{h}_2\ |$, $|\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{h}_3\ |$, $|\ \mathfrak{x}_4\ \mathfrak{h}_4\ |$, $|\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{y}_1\ |$, $|\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{y}_2\ |$, $|\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{y}_3\ |$, $|\ \mathfrak{g}_4\ \mathfrak{y}_4\ |$ sind offenbar lauter Erzeugende von $F_1^{(2)}$. Es ist mithin $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_4 \barwedge \mathfrak{h}_1\ \mathfrak{h}_2\ \mathfrak{h}_3\ \mathfrak{h}_4\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{y}_3\ \mathfrak{y}_4$. Die Punkte $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4$ und $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_4$ gehören ferner zwei Quadrupeln einer und derselben Doppelinvolution auf g an. Schlägt man nun in einer beliebigen durch g gelegten Ebene über den Strecken $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_3$ und $\mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_4$ als Durchmesser zwei Kreise, so schneiden sich diese in zwei reellen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, weil die Punktepaare $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_3$ und $\mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_4$ als Gegenpunkte eines Quadrupels sich harmonisch trennen (1. Hilfssatz). Von den Geraden $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_1\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_2\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_3\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_4\ |$ schneiden sich mithin zwei auf einander folgende stets in einem Winkel von 45°. Von den Verbindungslinien $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_1\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_2\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_3\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_4\ |$ gilt offenbar dasselbe. Bei dieser Figur lehrt uns nun unmittelbar die Anschauung, dass die Strahlen $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_1\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_2\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_3\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_4\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_1\ |$ in projektivische Beziehung zu den Strahlen $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_4\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_3\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_2\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{g}_1\ |$, $|\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{x}_4\ |$ gebracht werden können. Mithin ist auch $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4\ \mathfrak{g}_1 \barwedge \mathfrak{g}_4\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{x}_4$. Da aber wegen der Projektivität von R und S: $\mathfrak{g}_4\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{x}_4 \barwedge \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_4\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{x}_1$, so ist $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4\ \mathfrak{g}_1 \wedge \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_4\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{x}_1$. Oben war aber $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{x}_3\ \mathfrak{x}_4\ \mathfrak{g}_1 \barwedge \mathfrak{h}_1\ \mathfrak{h}_2\ \mathfrak{h}_3\ \mathfrak{h}_4\ \mathfrak{y}_1$. Daraus ergiebt sich endlich $\mathfrak{h}_1\ \mathfrak{h}_2\ \mathfrak{h}_3\ \mathfrak{h}_4\ \mathfrak{y}_1 \barwedge \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_4\ \mathfrak{g}_3\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{x}_1$. Verändert sich nun die Fläche $F_1^{(2)}$, so verändern sich auch die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ und beschreiben demnach zwei projektivische Punktreihen auf g und h. Die Polarebene von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $F_1^{(2)}$ geht offenbar durch die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ und den 4ten harmonischen Punkt $\mathfrak{Q}$ zu den Punkten $\mathfrak{P}\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{h}_1$ auf der Geraden p. Da die letzteren drei Punkte von $F_1^{(2)}$ unabhängig sind, so verändert sich auch $\mathfrak{Q}$ nicht, wenn

$F_1(^2)$ variiert. Die Ebenen $[\mathfrak{Q}\ \mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1]$ umhüllen demnach, wenn $F_1(^2)$ sich ändert, entweder einen Kegel zweiter Ordnung oder sie gehen sämtlich durch eine Gerade. Es findet in Wirklichkeit das letztere statt. Denn geht die Fläche $F_1(^2)$ durch den Punkt $\mathfrak{P}$, so ist p eine Erzeugende von ihr und $\mathfrak{x}_1$ ist dann mit $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ mit $\mathfrak{h}_1$ identisch, so dass die mit $\mathfrak{Q}$ in gerader Linie befindlichen Punkte $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}_1$ entsprechende Punkte der von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ auf g und h gebildeten projektivischen Punktreihen sind. Damit ist unser Satz erwiesen.

Die reellen sich selbst entsprechenden Flächen zweiter Ordnung, welche g und h zu Erzeugenden haben, bilden also ein Büschel. Die Grundkurve dieses Büschels besteht aus g und h und einem imaginären Bestandteile. Wäre nämlich bei zwei Flächen $F_1(^2)$ und $F_2(^2)$ dieses Büschels $\mathfrak{a}$ ein beliebiger reeller, weder auf g noch auf h gelegener gemeinsamer Punkt, so müsste, da durch einen Punkt in einem Systeme sich nur eine einzige Gegengerade ziehen lässt (S. 19) und beide Flächen in jedem Punkte je eine Gegengerade als Erzeugende enthalten müssten, die durch $\mathfrak{a}$ gehende Gegengerade beiden gemeinsam sein. Da aber durch drei sich nicht schneidende Geraden eine Fläche zweiter Ordnung eindeutig bestimmt ist, so müssten die beiden Flächen $F_1(^2)$ und $F_2(^2)$ identisch sein, was gegen die Voraussetzung wäre.

Die Flächen des zweiten Flächenbüschels zweiter Ordnung haben gar keinen reellen Punkt gemein. Der Beweis dafür kann in ähnlicher Weise geführt werden.

Die Schnittkurve einer beliebigen Fläche $F(^2)$ des ersteren Büschels und einer beliebigen Fläche $F_1(^2)$ des zweiten Büschels besteht aus einem reellen Gegengeradenpaar und einem ferneren imaginären Bestandteile. Da nämlich die Geraden g und h Erzeugende von $F(^2)$ und konjugierte Geraden in Bezug auf $F_1(^2)$ sind, so befindet sich ein Teil der Fläche $F(^2)$ innerhalb $F_1(^2)$ und der andere ausserhalb. Es müssen daher $F(^2)$ und $F_1(^2)$ reelle Punkte gemein haben. Das Weitere ist leicht einzusehen. Der Beweis dafür darf wohl übergangen werden.

„Beim elliptisch doppelinvolutorischen Systeme giebt es demnach zwei und nur zwei Büschel reeller doppelinvolutorischer Flächen zweiter Ordnung. Alle diese Flächen sind einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide; keine von ihnen zerfällt in ein Ebenenpaar oder degeneriert in einen Kegel zweiter Ordnung. Bei jeder dieser Flächen sind die Erzeugenden der einen Schar lauter Gegengerade des Systems, die involutorisch angeordnet sind, während die der anderen Schar aus Geradenquadrupeln bestehen, welche eine Doppelinvolution bilden. Bei den Flächen des einen Büschels sind die durch die Gegengeraden bestimmten Involutionen hyperbolisch und haben g und h

zu gemeinschaftlichen Doppelgeraden. Die analogen Involutionen bei den Flächen des zweiten Büschels sind dagegen elliptisch. Die Flächen des ersten Büschels haben ausser g und h keinen ferneren reellen Bestandteil, die des zweiten gar keinen reellen Punkt gemeinsam. [Die Grundkurve des ersten Büschels besteht aus den zwei reellen und denjenigen zwei imaginären Doppelgeraden des Systems, auf denen sich wechselseitig entsprechende, eine Punktinvolution bildende Punktepaare liegen; die des zweiten Büschels ist dagegen vollständig imaginär, gebildet aus den vier imaginären Doppelgeraden des Systems]. Eine beliebige Fläche des einen Büschels schneidet jede Fläche des anderen in zwei reellen Geraden, die Gegengerade des Systems sind. [Der fernere Bestandteil dieser Schnittkurve besteht aus denjenigen zwei imaginären Doppelgeraden des Systems, die Träger der bereits erwähnten Punktinvolutionen sind]. Durch ein beliebiges, nicht auf den reellen Doppelgeraden liegendes Punktquadrupel gehen zwei und nur zwei reelle doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung, von denen die eine dem ersten und die andere dem zweiten Büschel angehört."

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ zwei beliebige, auf keiner der beiden reellen Doppelgeraden liegende Punktquadrupel des vorliegenden Systems. Durch diese acht Punkte ist stets eine und nur eine doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung und erster Species $C(^4)$ bestimmt.

Diese Behauptung ist selbstverständlich für den Fall, in dem die Punkte keine associierten Punkte sind. Sind aber die letzteren associierte Punkte, so kann man zunächst mindestens eine derartige Kurve $C(^4)$ hindurch legen. Als eine solche kann man z. B. die Schnittkurve derjenigen beiden Flächen zweiter Ordnung ansehen, welche durch jene acht Punkte gehen und von denen die eine zwei Gegenpunkte eines beliebigen auf h gelegenen Quadrupels und die andere die beiden übrigen enthält. Sodann geht durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ keine fernere Raumkurve dieser Art. Denn wäre $C_1(^4)$ eine solche, so müssten $C(^4)$ und $C_1(^4)$ bekanntlich auf einer reellen Fläche zweiter Ordnung liegen. Diese Fläche müsste offenbar sich selbst entsprechen. Die zwei den Räumen R und S angehörigen, unter sich projektivischen Flächenbüschel zweiter Ordnung mit $C(^4)$ als gemeinschaftlicher Grundkurve müssten alsdann, da sie eine reelle Doppelfläche hätten, noch eine zweite reelle Doppelfläche enthalten. $C(^4)$ wäre also die Durchschnittskurve zweier reellen doppelinvolutorischen Flächen. Als solche müsste diese Kurve entweder ganz imaginär sein oder die reellen Doppelgeraden oder ein Gegengeradenpaar als einzige reelle Bestandteile enthalten (p. 47). Die beiden ersteren Fälle sind nun

offenbar unmöglich; aber auch der dritte darf nicht eintreten. Man könnte nämlich dieselbe Betrachtung auch bei $C_1(^4)$ anstellen. Alsdann gingen durch $C(^4)$ zwei doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung, die als gemeinschaftliche Erzeugende ein reelles Gegengeradenpaar enthielten und durch $C_1(^4)$ zwei Flächen derselben Art mit denselben Gegengeraden als gemeinschaftlichen Erzeugenden. Da aber durch ein Punktquadrupel und mithin auch durch ein Gegengeradenpaar zwei und nur zwei reelle doppelinvolutorische Flächen zweiter Ordnung hindurchgehen (p. 48), so müssten die beiden ersteren Flächen mit den beiden letzteren identisch sein, mithin auch $C(^4)$ mit $C_1(^4)$.

Durch eine derartige Kurve $C(^4)$ lässt sich, wenn jene zwei Punktquadrupel keine gemeinschaftliche Gegengerade haben, niemals eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung hindurchlegen. Denn wäre eine vorhanden, so müsste auch eine zweite existieren. Die Schnittkurve zweier derartigen Flächen besteht aber entweder aus den Geraden g und h oder aus einem reellen Gegengeradenpaar und imaginären Bestandteilen oder ist vollständig imaginär (p. 48). Von diesen drei Fällen kann aber offenbar keiner bei unserer Raumkurve $C(^4)$ eintreten.

Liegen die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ auf einer reellen doppelinvolutorischen Fläche zweiter Ordnung, so kann nach dem soeben Bewiesenen auf derselben die durch diese acht Punkte bestimmte doppelinvolutorische Raumkurve $C(^4)$ nicht liegen. Daraus folgt, dass alsdann die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ acht associierte Punkte sind. Zwei beliebige Punktquadrupel, die auf einer reellen sich selbst entsprechenden Fläche zweiter Ordnung liegen, bestehen also stets aus acht associierten Punkten.

Befinden sich dagegen zwei Punktquadrupel nicht auf einer solchen Fläche, so bilden sie auch niemals acht associierte Punkte. Denn wäre dies der Fall, so ginge durch dieselben stets eine derartige reelle Fläche zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die konjugierten Punkte einer beliebig gegebenen geradlinigen Involution wiederum konjugierte Punkte wären. Wählte man aber dazu diejenige Involution, die von den Gegenpunkten der auf g gelegenen Quadrupel gebildet wird, so müsste die dadurch bestimmte reelle Fläche offenbar sich selbst entsprechen. Dies führt auf einen Widerspruch, ist also nicht möglich.

Eine doppelinvolutorische Kurve $C(^4)$ hat, wenn sie nicht aus einem Gegengeradenpaar und irgend einer Restkurve besteht, keine der beiden reellen Doppelgeraden zur Sekante, weil sich sonst durch diese Doppelgeraden und $C(^4)$ eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung hindurchlegen liesse.

Die Flächen des durch $C(^4)$ gelegten Büschels zweiter Ordnung schneiden

mithin jede der beiden reellen Doppelgeraden nicht in denselben zwei Punkten, sondern in Punktepaaren einer Involution. Diese Involution hat mit derjenigen, welche von den Gegenpunkten der Punktquadrupel auf g oder h gebildet wird, (mindestens) ein reelles Paar konjugierter Punkte gemein, weil die letztere eine elliptische Involution ist. Es seien dies die Punkte 1 und 3 des Quadrupels 1, 2, 3, 4 auf g. Der durch $C^{(4)}$ und 1, 3 bestimmten Fläche zweiter Ordnung von R entspricht alsdann in S die durch $C^{(4)}$ und 2, 4 gehende und umgekehrt. Die beiden den Räumen R und S zugehörigen, projektivischen Flächenbüschel zweiter Ordnung mit der gemeinschaftlichen Grundkurve $C^{(4)}$ liegen mithin involutorisch auf einander.

Die vier durch $C^{(4)}$ gehenden Kegel zweiter Ordnung sind, falls $C^{(4)}$ nicht zerfällt, sämtlich imaginär. Wäre nämlich einer von ihnen reell, so müsste demselben, wenn man ihn als ein Gebilde des Raumes R auffasste, nach dem soeben Gesagten in S ein anderer reeller Kegel zweiter Ordnung entsprechen und umgekehrt. Die Spitzen dieser beiden Kegel wären alsdann zwei reelle, sich in R und S wechselseitig entsprechende Punkte. Dergleichen Punkte aber existieren in diesem Systeme nicht (p. 18). Alle doppelinvolutorischen $C^{(4)}$ in diesem Systeme sind infolgedessen wesentlich von den analogen Raumkurven des hyperbolisch doppelinvolutorischen Systems verschieden, da im letzteren durch jede $C^{(4)}$ mindestens zwei reelle Kegel zweiter Ordnung hindurchgehen.

„Liegen beim elliptisch doppelinvolutorischen Systeme zwei Punktquadrupel auf einer reellen doppelinvolutorischen Fläche zweiter Ordnung, so bilden sie acht associierte Punkte. In allen übrigen Fällen sind dieselben acht unabhängige Punkte. Mögen nun diese zwei Quadrupel aus associierten Punkten bestehen oder nicht, so ist durch sie, wenn sie nur nicht auf den reellen Doppelgeraden des Systems liegen, stets eine und nur eine doppelinvolutorische Raumkurve vierter Ordnung und erster Species $C^{(4)}$ bestimmt. Umgekehrt kann man alle in diesem Systeme möglichen doppelinvolutorischen Kurven $C^{(4)}$ dadurch erhalten, dass man alle möglichen Punktquadrupelpaare zu Bestimmungsstücken derselben wählt. Durch keine solche $C^{(4)}$ geht, wenn sie nicht derart zerfällt, dass ein Teil von ihr ein Gegengeradenpaar ist, eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung. Es ist ferner keine der beiden reellen Doppelgeraden des Systems eine Sekante derselben. Alle diese Raumkurven zerfallen entweder gar nicht, was im allgemeinen der Fall ist, oder sie bestehen nur aus vier reellen ein windschiefes Vierseit bildenden Geraden oder aus je einem reellen Gegengeradenpaare und einem ferneren

imaginären Bestandteile, oder endlich aus je einer reellen doppelinvolutorischen Raumkurve dritter Ordnung und einer reellen Doppelgeraden. Durch keine nicht zerfallende Raumkurve $C^{(4)}$ dieser Art lässt sich ein reeller Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen".

Der Satz über die doppelinvolutorischen Raumkurven dritter Ordnung bedarf noch eines Beweises. Es sei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ein beliebiges weder auf g noch auf h gelegenes Punktquadrupel. Durch die vier Punkte desselben und die beiden Doppelpunkte der Geraden g ist eine Raumkurve $C^{(3)}$ eindeutig bestimmt. Trotzdem die Doppelpunkte auf g imaginär sind, ist diese $C^{(3)}$ dennoch reell, leicht auf reelle Weise als Teilschnittkurve von Kegeln zweiter Ordnung herstellbar und entspricht sich offenbar selbst.

Diese $C^{(3)}$ kann ferner niemals zerfallen. Denn fände das statt, so könnte sie, da reelle doppelinvolutorische Kegelschnitte in diesem Systeme nicht vorkommen, nur in drei Gerade zerfallen. Diese müssten, da die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ nicht auf einer Geraden liegen, sämtlich reell sein und offenbar aus einem Gegengeradenpaare und einer reellen Doppelgeraden bestehen. Dies ist aber unmöglich, da das Gegengeradenpaar $|\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}|$ keine der reellen Doppelgeraden schneidet (p. 19), was doch sein müsste, wenn diese drei Geraden eine Raumkurve dritter Ordnung bilden sollten.

Die Gegenpunkte der sämtlichen auf unserer $C^{(3)}$ befindlichen Quadrupel bilden eine Involution. Ihre Verbindungslinien sind daher Erzeugende eines doppelinvolutorischen Hyperboloides $H^{(2)}$.

Dieses Hyperboloid $H^{(2)}$ gehört demjenigen Büschel doppelinvolutorischer Flächen zweiter Ordnung an, dessen Grundkurve ganz imaginär ist. Denn gehörte $H^{(2)}$ dem anderen Büschel an, so müsste es g zur Erzeugenden haben. Alsdann ginge aber durch die aus g und $C^{(3)}$ zusammengesetzte doppelinvolutorische $C^{(4)}$ eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung, was nach dem Obigen nicht sein darf (p. 50).

Durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und die beiden imaginären Doppelpunkte der Geraden h ist in ähnlicher Weise eine zweite doppelinvolutorische reelle nicht zerfallende Raumkurve dritter Ordnung $C_1^{(3)}$ bestimmt. Diese $C_1^{(3)}$ ist von $C^{(3)}$ verschieden. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste $C^{(3)} \equiv C_1^{(3)}$ die Geraden g und h zu Sekanten haben. Das durch $C^{(3)}$, g und h bestimmte Hyperboloid wäre alsdann eine reelle doppelinvolutorische Fläche zweiter Ordnung, was hier, wie so eben gezeigt wurde, nicht stattfinden darf.

Durch $C_1^{(3)}$ geht ebenfalls ein reelles, doppelinvolutorisches, demselben

Büschel angehöriges Hyperboloid. Dieses Hyperboloid ist mit $H^{(2)}$ identisch, weil beide demselben Büschel angehören und nicht nur durch einen, sondern sogar durch vier Punkte, nämlich a, b, c, b, gehen, die nicht auf der Grundkurve des Büschels liegen.

„Von den vier doppelinvolutorischen Systemen enthält also das elliptische allein reelle, nicht zerfallende doppelinvolutorische Raumkurven dritter Ordnung. Alle diese Kurven liegen auf reellen doppelinvolutorischen einschaligen Hyperboloiden, die demjenigen Büschel doppelinvolutorischer reeller Flächen zweiter Ordnung angehören, dessen Grundkurve vollständig imaginär ist. Durch ein beliebiges auf keiner der beiden reellen Doppelgeraden gelegenes Punktquadrupel oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch einen beliebigen Punkt im Raume sind zwei dieser Kurven bestimmt. Die eine von ihnen hat die Doppelgerade *g*, nicht aber die Doppelgerade *h* zur Sekante. Bei der anderen findet das Umgekehrte statt. Diese beiden Raumkurven liegen auf demselben sich selbst entsprechenden Hyperboloide und haben die Erzeugenden derselben Schar desselben zu Sekanten; es ist dies diejenige, welche aus lauter Gegengeraden besteht.“

Lebenslauf.

Ich, Andreas Pampuch, geboren am 27. November 1855 in Alt-Schalkowitz in Schlesien, Sohn des Bauergutsbesitzers Thomas Pampuch und seiner Ehefrau Franziska geb. Kammer, wurde auf dem Gymnasium zu Oppeln vorgebildet und von demselben im Herbst 1877 mit dem Zeugnisse der Reife entlassen. Hierauf studierte ich in Breslau Mathematik, Naturwissenschaften und Philosophie und hörte daselbst Vorlesungen bei den Herren Professoren: Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Krause, Meyer, Poleck, Römer, Rosanes, Schneider, Schröter. Sechs Semester war ich Mitglied der von den Herren Dr. Schröter und Dr. O. E. Meyer geleiteten mathematisch-physikalischen Seminare. Nach bestandenem Examen *pro facultate docendi* leistete ich auf dem Königlichen Gymnasium zu Oppeln von Herbst 1883 bis Herbst 1884 das vorschriftsmässige Probejahr ab und trat unmittelbar darauf meine jetzige Stellung als Lehrer am hiesigen katholischen Gymnasium zu St. Stephan an.

Allen den genannten Herren Professoren, insbesondere Herrn Professor Dr. Schröter, spreche ich hiermit meinen herzlichsten Dank aus.